

中国科学技术大学

博士学位论文



量子互文的光学实验研究

作者姓名： 刘正昊

学科专业： 物理学

导师姓名： 许金时 教授 李传锋 教授

完成时间： 二〇二二年三月二十一日

University of Science and Technology of China
A dissertation for doctor's degree



Exploring Quantum Contextuality with Photons

Author: Zheng-Hao Liu

Speciality: Physics

Supervisors: Prof. Jin-Shi Xu, Prof. Chuan-Feng Li

Finished time: March 21, 2022

中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所提交的学位论文，是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名：_____

签字日期：_____

中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一，学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权，即：学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅，可以将学位论文编入《中国学位论文全文数据库》等有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

保密的学位论文在解密后也遵守此规定。

公开 保密 (____ 年)

作者签名：_____

导师签名：_____

签字日期：_____

签字日期：_____

致 谢

本文是我在中国科学技术大学的学习经历和研究工作的总结。我于 2016 年加入中科院量子信息重点实验室，在导师李传锋教授和许金时教授的指导下开始进行博士课题的研究，到目前已经是第七个年头。不管是从学术专业上，还是从个人发展上，这七年时间我都受益匪浅。尽管科研的历程总是伴随着挫折、疑惑和烦恼，但是在即将毕业之际，回首望去，使我深深感到我的博士生涯是无比的幸运，其中所有的经历都弥足珍贵。量子信息是当代科学中的一个朝气蓬勃的发展方向，专注于该方向研究的量信实验室也有着尖端的科研设施和友好活跃的氛围。充足的实验设备使我有机会能够开展感兴趣的实验研究，而周围一众水平优秀的同事们总能在我对研究一筹莫展之时给我灵感，在实验遇到困难时对我伸出援手。倘若没有量信实验室大家庭一般的环境，我就绝无可能取得迄今为止的研究成果和对量子信息学的一定程度上的知识。

因此，我将首先感谢郭光灿院士建立了量信实验室，为我们提供了国际领先的科研平台。感谢李传锋教授给了我量信实验室从事科研的机会，在科研、生活和为人各个方面的指导，以及在我迷茫之际的指点迷津。

我要感谢许金时教授对我一直以来的悉心培养。从我进入研究组的那天起，许老师就是我科研的带路人，我的每一份成果都离不开他倾注的心血和各个环节上的帮助。许老师是小分队的带头人，他以身作则、身先士卒，不仅教育我们如何把研究课题从确定方向到开始实验再到一路推进到底，而且赋予了整个小分队进取的精神和活跃的氛围。最令我印象最为深刻的是在实验遇到瓶颈时，许老师连着几天在实验室陪我做实验到半夜；我也会清晰记得许老师每个节日把小分队叫在一起从不遗漏的聚会，以及他组织量子光学会议时带领大家有序地进行各项工作，偌大的会场井井有条的画面。

感谢在实验上给我指点和帮助的孙凯师兄和程则迪师兄。在科研最初的扎根阶段，他们教会了我许许多多的实验技巧，今天做实验的得心应手离不开他们当初不厌其烦的指导，以及对我不知多少次失败和犯错的耐心。感谢带领我完成量子柴郡猫实验的许小冶老师，他教会我如何把一个初步的想法一步步变成丰富的研究结果，如何在解答审稿人疑惑的过程中一点点提高论文的水平。感谢在科研生涯规划中给予我诸多指导的王俊峰老师，他教会了我做科研所需的除了具体项目之外的点点滴滴，让我更明白如何能够把学术作为事业一直做下去。

感谢南开大学的陈景灵教授对我的鼎力支持。陈老师不仅理论研究造诣深厚，而且热爱教学事业，在与他的对话中我得到了对量子信息理论最初的认识，并且最终喜欢上了这个妙趣横生的研究方向。陈老师和他的团队至今已经与我

合作了六项工作，没有他们的努力，这些工作都不可能有效果。感谢韩永建教授对我的教导和启发，韩老师平易近人，对量子计算领域的见解别具一格，与他的讨论不仅为我提供了非常多的理论见解，而且特别能够迸发灵感，我对研究方向的选择离不开他的指导。感谢德国锡根大学的许振朋老师、中科大数学系的马杰老师、上饶师范大学的李波老师和梁晓斌老师、陕西师范大学的汤卫东老师、复旦大学的朱黄俊老师、上海交大的金贤敏老师，南开大学的张福林老师、天津大学的范锦涛老师、安徽大学的王栋老师、北京玻色量子的文凯博士和他的同事们，与他们的讨论不仅帮助了我的科研，而且开阔了我的视野。

感谢实验室的老师。感谢唐建顺、吴玉椿、项国勇、柳必恒、叶向军、张超、侯志博和胡晓敏老师在理论和实验上对我的指导；感谢王涛、吴莉、段开敏、李洪梅和汪玉婵老师和系里的朱咏梅老师在管理上为实验室做出的贡献。感谢实验室的陈师傅和地空楼办公室的王师傅在后勤上给予的帮助。感谢实验室的同学和同事们。杨木不仅是我的师弟，而且是一起玩耍的好朋友。在工作的时候我们的讨论对彼此的研究大有裨益，在下班之后我们一起逍遥洒脱，追寻生活的快乐。刘伟和郝泽琰是我的中国好室友，和他们分享生活的点点滴滴喜怒哀乐使得每天晚上的生活不再枯燥。肖芽师姐、俞上师兄、李强师兄和郭钰师兄都是我科研的榜样，不管毕业多久，时常会想起他们努力工作的身影，也感谢他们对我工作和前途的指导。闫飞飞、潘维韦、胡军、李恩泽和李志鹏与我分享了天高皇帝远的 329 办公室，感谢他们带来的欢声笑语。感谢同门的柯芝锦、刘超、王琴琴、刘世凯、殷鹏、杨琛、王焱、黄舰印、周继阳、廖昱玮、汪兆安、郑逸、何桢暄等等同学，也感谢我在南开大学的朋友孟会贤、周洁、尚为民和樊星言，在西安交大的朋友茹世浩，我们一起学习，共同进步。

感谢我的国际合作者 Adán Cabello 教授、Giannis Pachos 教授、Eric Cavalcanti 教授和 Rosario Lo Franco 教授对我工作的理论支持和对论文孜孜不倦的修改。还要感谢丹麦技术大学的 Jonas S. Neergaard-Nielsen 资深研究员和 Ulrik L. Andersen 教授、以及瑞士洛桑联邦理工学院的 Giuseppe Carleo 教授，与他们对连续变量量子光学和变分量子算法的探讨，让我对未来的研究方向充满了激情。

感谢合肥这座承载了中科大的城市。多年之后我仍会想起赵氏烧烤和牛牛烧烤、东门的肥肠和擀面皮、春哥和他的京来合火锅。感谢校医院传统医学科的马树田主任和他的同事们。感谢我在家乡的朋友耿浩然、马俊恒、徐尚、张雄冠、谢鹏和程宏，由于疫情的影响有近半年的时间只能在家度过，每天与他们打球和聊天不仅强健了身体，而且开阔了科研之外的视野。感谢我的本科朋友徐一鸣、丁睿、贺飞、姚志鹏、景伟国、曹宇、冯鸣啸、经士浩、王杰、孙艺杰和陈宏博，每次听闻老友的消息，与老友相聚都分外开心。感谢我的挚友郭彦谷、周航和张化雨，与他们交流总是能互相激励、看到不一样的世界。

致 谢

尽管在量信实验室的时光就像身处一个大家庭，但是工作之外的家庭也是我背后强大的支持力。我希望藉此文向我的父亲和母亲致以最深的感谢。没有他们二十多载如一日的哺育和培养，我不可能有机会成为一个优秀的人，他们的默默支持是我最强大的后盾。感谢我的姥姥姥爷、爷爷奶奶，他们即使完全不知道何为科研，也总是默默地支持着我的一切。感谢我的小姨为我提供了人生不一样的视野。最后，我希望感谢我的未婚妻孟雨女士，我们亦是科研的同事、亦是人生的战友、亦是心灵的伴侣。与她的每一次对话，都是我变得更好的动力；有她的每一天陪伴，都是我人生最幸福的时光。

刘正昊

2022年3月21日

摘 要

量子互文性是量子力学的一个最为深刻和奇特的特征。一言以蔽之，它导致在量子力学中对一个物理量单次测量的结果依赖于测量进行的方式，而不仅仅是被测量的单个物理量本身。哪些可观测量在单次测量过程中同时被观测，将影响每个可观测量最终的测量结果。量子互文性也是现代量子信息学中的一个核心概念。它可以解释著名的量子非定域性，是一大批非经典佯谬的根源，也是实现很多量子信息处理任务的资源。尤其是近些年的研究已经阐明了量子互文性与通用量子计算之间的联系。因此，对量子互文性开展研究，特别是紧跟理论进展的实验研究，不仅能够帮助对量子力学基础的理解，而且能够推动量子信息技术取得进一步的发展。

最近十五年以来，对于量子互文性的研究已经从纯粹理论层面发展到能够进行直接实验测试的阶段。然而，当前阶段针对互文性的实验研究很大程度上停留在对于互文性几个最著名预言的直接检测层面上，而对于互文性的其他形式和在量子信息方向研究中的实际应用则甚少涉及。本论文中的研究就旨在解决上述的问题。具体来说，本论文从两个方向开展创新性的研究：一是构造并检验更强形式的互文性，从而降低互文实验对于实验平台的苛刻要求；二是探讨互文性与量子信息学中其它概念之间的联系，从而直接从实验上展示互文性在更广泛场合之中的应用。本论文的最新版本可在以下地址取得：https://manekimeow.github.io/document/zhliu_PhDthesis.pdf。

本论文中介绍的主要研究成果为：

1. 实验展示超越非定域性的量子互文性、构造并实验实现将已知最强的量子关联嵌入到更低维的系统中。

由于非定域性是量子互文性在类空间隔下的表现形式，因此有可能通过解除类空间隔对测量算符形式的约束，来增强非定域性导致的量子关联。同时，解除额外约束条件使量子关联所需的态空间维数降低。在正文第4章中，我们从实验上观察到互文超越非定域和互文浓缩两种现象，从而展示了量子互文性与非定域性的密切关系。

2. 构造并实验观测到适用于图态的“全对无”佯谬，并展示其在量子态鉴别、纠缠和导引目击方面的应用。

每个量子互文性的逻辑性证明都可被转化为一个“全对无”类型的量子—经典佯谬。图态是一类高度纠缠的量子态，也是进行基于测量的量子计算的基本模块。我们在正文第5章中介绍对于量子互文性导致的“全对无”佯谬的理论和实

验研究，并展示其在量子态鉴别、纠缠和导引目击方面的应用。

3. 开发出不依赖弱测量的弱值提取方法，实验观测到量子柴郡猫之间的诡笑交换。

研究包含前-后选择的量子系统将使我们获得量子系统演化过程的额外信息，反映在演化过程的“弱值”中。量子互文性将使量子过程出现一些有悖常识的行为，例如量子柴郡猫现象——一个量子系统的属性与其本身出现分离。我们在正文第 6 章中以量子柴郡猫佯谬为例，实验研究量子互文性导致的前-后选择型佯谬。

4. 设计实现专用的光量子模拟器，验证仲费米子体系实现通用容错量子计算的能力。

通过结合量子互文性和准粒子体系的拓扑保护特性，有望实现通用的容错量子计算。我们在正文第 7 章中，使用量子模拟的手段，在光学系统中研究仲费米子（准粒子）编码的量子系统用于携带和保护量子信息的能力。我们设计实现专用的光量子模拟器，在其中研究准粒子编织操作导致的几何相位、准粒子体系对量子互文资源的拓扑保护特性、以及编织操作中量子互文资源的守恒特性，从而说明该体系实现通用容错量子计算的潜力。

关键词：量子互文；线性光学量子计算；图论；光学干涉仪；量子力学基础；量子模拟。

ABSTRACT

Quantum contextuality is one of the most intriguing and peculiar predictions of quantum mechanics. In layman’s terms, it refers to the fact that the result of a single measurement of a physical quantity in quantum mechanics depends on the way the measurement is carried out. More precisely, the measurement outcome of an observable does not only reflect the pre-defined value of the observable itself; instead, the knowledge about the context—the set of compatible observables that are actually measured—is indispensable to determine the measurement result. Quantum contextuality is also a cornerstone in modern quantum information science. It is the origin of the famous quantum nonlocality and various nonclassical paradoxes. It is also a resource for many quantum information processing tasks and even universal quantum computing. Therefore, the study of quantum contextuality not only advances the comprehension of the foundations of quantum physics, but also facilitates the practical applications of quantum information technology.

In the last fifteen years, the study of quantum contextuality has developed from a purely theoretical level to a stage where direct experimental tests become amenable. However, the experimental research on contextuality at the current stage largely focuses on direct validations of some most famous predictions of contextuality, while other forms of contextuality and its practical applications in quantum information science are rarely involved. The researches in this thesis are committed to bridge this gap from two directions: (1) to construct and test stronger forms of contextuality and relieve the requirements of contextuality experiments on experimental platforms, and (2) to explore the connections between contextuality and the other concepts in quantum information science and directly demonstrate the application of contextuality in broader scenarios.

The content in this thesis may subject to change *after* it has been submitted to the university. Also, to support open access and remove barriers in scientific research, I make the latest version of this doctoral thesis freely available at the following address: https://manekimeow.github.io/document/zhliu_PhDthesis.pdf. I will present the following research findings in this thesis:

1. Relationship between quantum contextuality and nonlocality

Since nonlocality is the manifestation of quantum contextuality in spacelike-separated systems, it is possible to enhance the nonlocal quantum correlation caused by nonlocality by lifting the constraint of the spacelike-separation from the measurement

operator. I have experimentally realised an example of quantum contextuality beyond nonlocality. At the same time, lifting the additional constraints could reduce the dimensionality of the state space required for demonstrating the quantum correlation. I have further constructed and experimentally realised the embedding of the strongest known quantum correlations into low-dimensional systems.

2. “All-versus-nothing” paradoxes from quantum contextuality

Every logical proof of quantum contextuality can be transformed into an “all-versus-nothing” type quantum–classical paradox. The graph states are a class of highly entangled quantum states and the basic building blocks for measurement-based quantum computing. I have constructed and observed the “all-versus-nothing” paradox applicable to graph states, and show its applications in quantum state verification and the witness of quantum entanglement and quantum steering.

3. Pre- and post-selection paradoxes from quantum contextuality

The investigation of quantum systems with pre- and post-selection provides additional information about its evolution process, which is reflected in the quantity called “weak values”. Quantum contextuality allows quantum processes to have strange behaviours; one example is the quantum Cheshire cat effect—the separation of the properties of a quantum system from the object itself. I have developed methods for weak value extraction without weak measurements to experimentally observe the exchange of grins between quantum Cheshire cats.

4. Topological protection and braiding dynamics of quantum contextuality in quasiparticle systems

The combination of quantum contextuality and the topological protection of quasiparticle systems is expected to pave the way for a universal fault-tolerant quantum computing architecture. I have studied the encoding of quantum information in parafermions—a type of quasiparticles—which topologically protects quantum information. I have designed and implemented a dedicated optical quantum simulator, in which the geometric phase from the braiding of parafermions, the topological protection of quantum contextuality resources, and the conservation properties of quantum contextuality in braiding operations are investigated to illustrate the potential of this system for universal fault-tolerant quantum computing.

Key Words: Quantum contextuality; linear optics quantum computing; graph theory; optical interferometry; foundations of quantum physics; quantum simulation.

目 录

致谢	I
第 1 章 绪论	1
第 2 章 量子互文的理论基础	7
2.1 量子力学的数学基础	8
2.1.1 量子态、演化和可观测量的表示	8
2.1.2 量子测量: Born 规则和 Lüders 规则	10
2.1.3 Gleason 定理	10
2.2 隐变量理论与量子互文	11
2.2.1 Kochen–Specker 定理	11
2.2.2 友人 A 的困惑: Peres–Mermin 方块	12
2.2.3 可实验验证的非互文不等式	16
2.2.4 图论与非互文不等式	19
2.3 互文性在量子信息学中的意义	21
2.3.1 与波函数实在性的关系	22
2.3.2 与经典因果模型的矛盾	23
2.3.3 与前-后选择型量子佯谬的关系	25
2.3.4 与非定域性的关系	25
2.3.5 在量子计算中的应用	26
第 3 章 线性光学中的量子信息	29
3.1 量子信息在光子上的编码	29
3.1.1 光子对的产生和探测	29
3.1.2 偏振、路径、时间窗口和空间模式自由度	31
3.2 光子的演化和操作	33
3.2.1 偏振量子比特的操作	34
3.2.2 偏振与其他自由度的耦合	36
3.2.3 虚时演化和非厄米哈密顿量	37
3.3 光量子态测量	40
3.3.1 偏振模式测量	40
3.3.2 空间模式测量	41
3.3.3 时间模式分辨	42
3.3.4 轨道角动量模式探测	43

第 4 章 互文性与非定域性关系的研究	45
4.1 非定域性、互文性与互斥图	45
4.1.1 一个例子：互斥图 C_5 对应的量子关联	47
4.2 用测量-重新制备方法研究互文性	48
4.3 超越非定域性的互文性	50
4.3.1 实验实现	52
4.4 在低维系统中实现已知最强的量子关联	56
4.4.1 Mermin 不等式：指数增长的量子-经典比	57
4.4.2 降低 Mermin 不等式中测量的维度	58
4.4.3 实验实现	60
4.5 小结	63
第 5 章 图态中的量子互文“全对无”佯谬	65
5.1 理论基础：“全对无”佯谬和图态概念	66
5.2 一类广泛的图态“全对无”佯谬	69
5.2.1 量子态验证	70
5.3 实验制备四量子比特图态	72
5.4 “全对无”佯谬的观测和应用	74
5.4.1 保真度估计与纠缠目击	76
5.4.2 量子导引的“全对无”佯谬	77
5.5 小结	79
第 6 章 互文性与前-后选择型佯谬：量子柴郡猫交换诡笑	81
6.1 追踪量子演化的过程	82
6.1.1 双态矢描述和弱值	82
6.1.2 一个例子：光子，你到过哪里？	83
6.2 互文性与量子柴郡猫佯谬	86
6.2.1 量子柴郡猫的笑脸去哪儿了	87
6.2.2 从 Peres-Mermin 方块中找到量子柴郡猫	89
6.2.3 “量子”柴郡猫？	90
6.3 量子柴郡猫的诡笑交换	91
6.3.1 可观测量和前-后选择态的构造	91
6.3.2 不依赖弱测量的弱值提取	94
6.3.3 实验实现	96
6.4 小结	99

第 7 章 拓扑保护的互文性：仲费米子的量子模拟	101
7.1 从仲费米子到光量子模拟	101
7.1.1 仲费米子的数学描述	102
7.1.2 仲费米子的编织操作	103
7.1.3 量子模拟概要	105
7.1.4 仲费米子到光学系统的对应	106
7.2 实验模拟仲费米子的编织统计	108
7.2.1 专用量子模拟器的设计	108
7.2.2 实验结果	109
7.3 从互文性到通用拓扑量子计算	112
7.3.1 互文性在编织操作下的动力学	113
7.3.2 仲费米子拓扑保护的互文性	114
7.3.3 用互文性研究仲费米子的拓扑保护	117
7.4 小结	120
第 8 章 展望与讨论	123
附录 A 光量子信息实验的案例：实现量子信息掩蔽	127
A.1 理论基础	127
A.2 实验光路的设计	128
A.3 实验结果的刻画	129
A.4 量子信息掩蔽的应用	131
参考文献	135
在读期间发表的学术论文与取得的研究成果	149

第1章 绪 论

量子力学在其不足百年的历史中已经极大地改变了人类社会的发展。在二战之后，现代集成电路借助着量子力学原理的发展开始进入人们的生活，成为人类文明进步的推动力之一，并使得人类社会进入信息时代。在 20 世纪末期，量子力学原理和信息论的结合催生了新的交叉学科——量子信息学，而基于操控量子系统实现的量子计算则提供了人类计算能力进一步飞越的希望 [1]。目前正在进行的“第二次量子革命”使得人们操作单个量子实体的能力进一步提升，从而量子科技能够在人类社会的诸多方面取得广泛应用，例如量子计算机已经在一些问题中展现相比于经典计算机决定性的加速 [2-3]。

尽管从诞生伊始的 20 世纪 20 年代至今，量子力学已经取得了无数巨大的成功，其发展的历史却是曲折的。随着时间的推移，人们对它的理解一直在不断改变，并且导致了大量颠覆性的新认知。例如引领量子力学和计算机科学发展的 von Neumann 可以算是量子信息学的鼻祖，然而其对于非对易变量的观点在 1990 年代已经被 Mermin [4] 批判为“silly”。现在我们知道，von Neumann 受到批判的观点实际上代表了一大类用于取代量子力学的唯象描述——隐变量 (hidden variable) 理论——之中共性的问题。隐变量理论尝试把量子力学中测量的结果使用实验前预先确定的（虽然是不可知的）隐变量来反映，这样量子测量的过程便仅仅是将物理量作为其对应的隐变量的函数来揭示出来。事实上，按照哥本哈根诠释，量子力学是建立在波函数之上的，内禀的不确定的理论，因此人们有充足的动机使用隐变量理论将量子力学重新表述为确定性的理论——所有的不确定性都来自于对于隐变量的无知。然而，代价是需要引入一些额外的假设，从而减弱了理论的可信度。有一些隐变量理论可以被证明与标准的量子力学是完全兼容的，例如 de Broglie 和 Bohm [5] 的导航波理论，其区别只在于对于相同物理现象的不同理解。然而对于另一些隐变量理论，情况则不尽如此，根本原因在于这些隐变量理论中所使用的（一些看似非常合理的）假设与量子力学本身已经存在不兼容性。这类理论中的代表之一就是非互文隐变量理论。

量子互文性^① (quantum contextuality)，有时也翻译为上下文，指的是量子测量的结果依赖于测量方式，具体来说指的是同时测量的对易可观测量如何选取。与之对立的概率模型就是非互文隐变量理论。不管从经验上还是量子力学的数学描述上，非互文的假定似乎都有理有据：在经验上，测量物体的长度结果不应

^①在本文中，我将在大量场合省去“量子互文”中的定语“量子”，从而在不引起歧义的前提下，保证行文的简练流畅。然而我同时指出：在广义的概率理论中，存在一类广泛的互文性的概率模型，因此互文性决非是量子力学独有的属性。另外，脚注中的内容带有我的个人见解，并不一定反映客观正确的科学性。

该依赖尺子，不然我们有充足的理由怀疑尺子的准确性；从数学上，量子力学中波函数与概率的基本对应关系——Born 规则——是非互文的。熟悉相对论的读者可能会发现，后一问题有点类似于 Einstein 的困惑 [6]：当一个多体纠缠系统中的一个粒子受到测量导致测量波函数坍缩时，远处粒子的波函数立刻改变，似乎与相对论有矛盾。然而，当考虑测量的平均效应时，波函数的坍缩不会导致任何有效的信息传递；观察远处粒子的观察者不仅不会得到测量结果的任何信息，甚至不能知道测量到底有没有发生。这里的区别在于考虑的是单次事件还是统计结果。从统计上而言，量子力学的所有统计性质都是定域、非互文的。但是量子力学的描述不仅适用于系综，对于单次事件同样有效。当关注单次测量的结果时，量子力学就将表现出其非定域、互文性的特点 [7]。Fine [8] 的工作表明，通过考虑多个可观测量概率分布的互相关联，就有可能将这种互文性的特点从概率分布上体现出来。

从上面的讨论看出，要从实验上研究互文性，仅仅知道系统在若干测量基下的整体概率分布往往还不够；相反，需要能够对单个量子的演化进行精确测量，从而获取其在演化（也可能是连续数次测量）过程中的大量信息。互文性研究对于实验技术的极高要求，在图 1.1 所示的本方向研究成果的里程碑中可见一斑：可以发现，上方的理论的研究早早就受到广泛关注，而下方的实验的研究直到近年才取得突破性进展。特别是在世纪之交，按照 Meyer [9], Kent [10], 以及 Clifton et al. [11] 等人的讨论，似乎不可能在有限精度下检测到量子力学与非互文隐变量理论之间的任何区别，因此互文性将被归结于一个哲学问题。确实，在那个年代，所有互文性实验，例如 Hasegawa et al. [12], Bartosik et al. [13] 等人的工作，都需要默认一些量子力学的假设，因此在一定程度上有些循环论证的色彩。转折出现在 2008 年，Cabello [14] 提出了从实验上不依赖量子力学的任何假设就可以检测互文性的方法，并且进一步考虑了如何将实验误差所带来的影响包含在内 [15]。自此之后，互文性的实验研究才取得了长足的发展，能够在不同的系统中测试多种非互文不等式。

由于互文性在量子信息学中的一系列作用，尤其是在未来可扩展的通用量子计算方面的决定性角色 [22]，其研究一直是领域内关注的热点问题。中国科学技术大学中科院量子信息重点实验室长期以来一直关注互文性方面的研究进展，在实验检测方面，具有长达 20 年的历史 [24]。考虑到互文实验所需的量子操作和读取进度对于硬件条件的要求，目前世界上常见的进行互文实验的平台基本只有超导、离子阱和光学系统三种。在博士期间，笔者在量子互文方向的实验工作依托本实验室国际领先的光学平台进行，集中在线性光学系统 [30] 中完成。在线性光学元件中，描述演化过程的哈密顿量 (Hamiltonian) 最多只包含光子产生/湮灭算符的一次项，因此既不会生成额外的光子，也不会导致光子之间

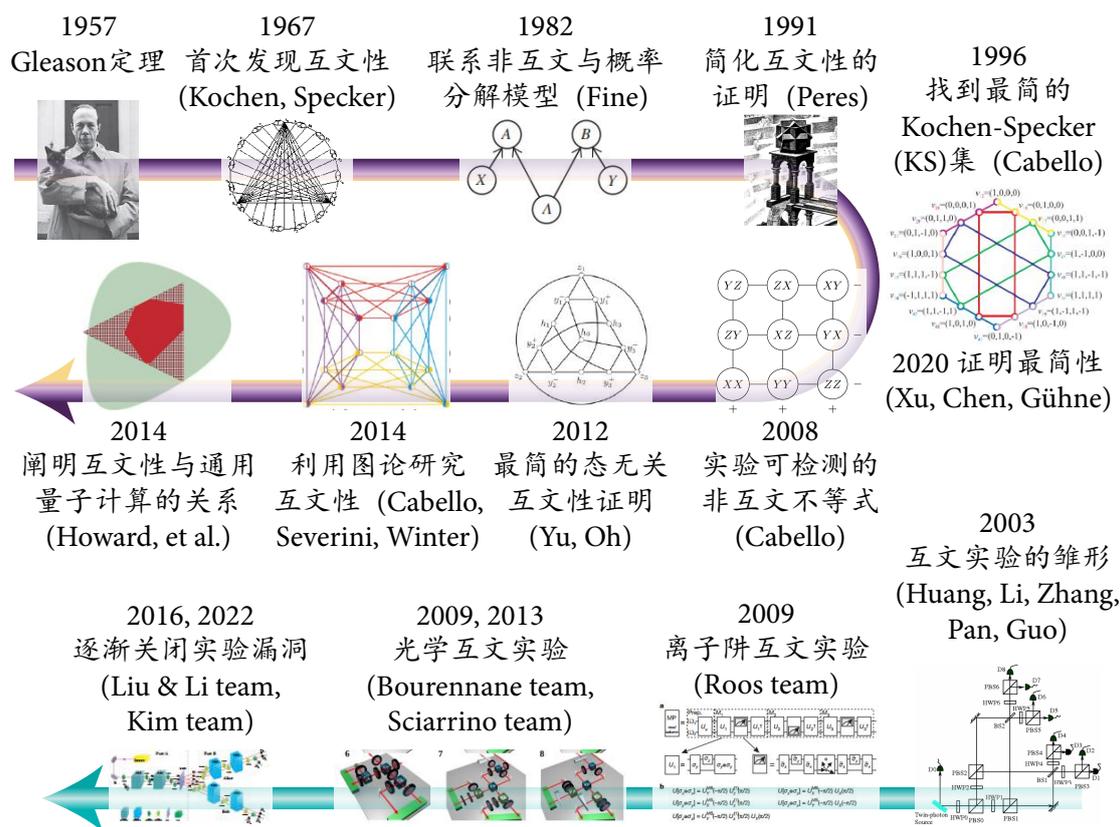


图 1.1 量子互文研究的发展史。图中标出了 Fine [8], Cabello [14], Gleason [16], Kochen et al. [17], Peres [18], Cabello et al. [19], Yu et al. [20], Cabello et al. [21], Howard et al. [22], Xu et al. [23] 在理论方面的研究和 Huang et al. [24], Kirchmair et al. [25], Amselem et al. [26], D’Ambrosio et al. [27], Hu et al. [28], Wang et al. [29] 在实验方面研究的里程碑。

发生相互作用。概括地讲，该系统具有下列优势：

1. **超长的相干时间：**相比于物质量子比特，光子几乎不受到电磁场干扰导致的退相干影响，光子的相干时间相对于门操作时间来说非常长。
2. **丰富的内禀自由度：**量子信息可被编码到光子的多个自由度上。尤其是光子有大量能够编码高维量子信息的自由度，而互文性恰恰需要依赖高维系统来体现。
3. **高精度的量子态制备、操控和读取：**有利于精确检测量子力学的预言。

因此，线性光学系统为互文性新进展的研究提供了良好的基础。事实上，线性光学系统一直以来都是量子力学基础研究和量子通信领域应用最为广泛的实验平台。然而，上述提到的优点伴随着一个关键的代价：因为光子之间不存在相互作用，所以为了实现等效的两量子比特门操作，就必须进行后选择，其成功率不可

能超过 50%。因此，若仅使用线性光学和全光系统，而不使用诸如 Kerr 效应等等的非线性相互作用，那么量子纠缠原则上是不可扩展的；另外，缺乏可靠两比特门也使得光学系统中进行连续测量的能力在一定程度上受到制约。

笔者的工作在一定程度上探索了解决上述问题的方法，从而在尚未真正实现光学系统扩展性的前提下^①，仅利用现阶段光学平台的资源就可进行一系列关于互文性及其未来可能应用的有意义的研究。本论文将使用大量的篇幅，着重介绍以下的几项研究：

1. 在理论上，把量子互文的检验归结为单体制备-测量 (prepare-and-measure) 实验中计数统计的组合，从而避免对于多光子干涉和接续测量的依赖。在第 4 章中，笔者将介绍使用该方法研究互文性与非定域性关系的两项成果，展现如何把人类目前已知的最强的量子关联，嵌入到更低维的系统中，而不减弱关联的强度。
2. 在实验上，借助光子多个自由度之间的耦合，扩展可用的态空间；在第 5 章中，笔者将介绍使用该方法构造图态和研究“全对无”互文佯谬的工作，从而实现图态的验证和纠缠目击。
3. 开发不依赖额外指针的测量方法，从而进一步降低测量过程对量子系统之间耦合的需求。在第 6 章中，笔者将介绍使用该方法提取量子系统演化中的过程量“弱值”，从而观测名为量子柴郡猫的新奇现象。
4. 使用量子模拟扩展可研究的问题领域。在第 7 章中，笔者将介绍使用该方法在光学平台上模拟准粒子编织统计和拓扑保护性质的实验，从而展示准粒子系统用于未来量子计算的前景。

同时，为了给上述的中心结果做铺垫，笔者将在第 2 章和第 3 章中分别概要地介绍量子互文的理论基础和线性光学实验的方法。在第 8 章，笔者将进一步展望这些方向未来可能的发展，以及简要地介绍一些已经在进行的工作。

接下来，我们就转向对于量子互文理论基础的介绍。相比于量子纠缠和非定域性等量子力学中脍炙人口的结论，互文性的物理意义要来得更为晦涩，而且关于它的讨论往往伴随着浓厚的数学色彩，使得一些不熟悉相关背景的读者望而却步。因此，本论文的理论部分将使用一个小故事来介绍互文性造成的奇特效应，再辅以量子力学的基础知识和简单的计算，使得互文性的整体概念跃然纸上。尽管这种写法相比于完全基于公理逻辑的框架也许要来得不那么严谨，但是笔者希望借助生动形象的故事，使得读者能够快速建立起对互文性的直观认

^①我相信光学系统将是未来最可扩展的量子计算体系——在 10^6 量子比特以上的量级，物质系统将必须面对与环境耦合退相干的效应，而光学系统无耦合的优势将是决定性的。然而目前看来，对应规模的光量子计算实现可能需要进一步结合光-物质界面 [31]，连续变量图态 [32-33] 和基于测量的量子计算 (measurement-based quantum computing [34]) 等手段，而非仅仅使用线性光学系统。

识，并帮助读者获得更好的理解。

第 2 章 量子互文的理论基础

设想屋子里有一只纯色猫，我们想要知道猫的颜色。我们可以从门口向里看，可以从窗户向里看，也可以在墙角放置摄像头，等待猫来到摄像头前面时进行观察。不管使用哪种方式，我们都将始终看到一只黑猫或者白猫，不可能从不同的视角看到猫的颜色发生了改变——不然我们会怀疑屋里至少有两只猫。猫的颜色应该是客观的，而不依赖观察的角度。

如果屋子里是一只“薛定谔 (Schrödinger) 的猫 [35]”，情况则会变得更有意思一些。在观察之前，猫可能处于黑色和白色的叠加状态，而我们的观察会使其突变为黑色或白色之一^①。然而，如果观察本身并不会影响猫的行为，那么似乎有充足的理由相信“薛定谔的猫”变成黑猫或白猫不应该取决于我们从门口、窗口还是摄像机中观察。为了检验这一假说，我们可以准备许多完全相同的“薛定谔的猫”，随机地从每个视角进行观察。结果如我们所料，每个视角下“薛定谔的猫”变成黑猫和白猫的概率都是完全相同的，仍然不依赖观察的角度。

我的一位好奇的生物学家朋友（以下我将他称为友人 A）对于“薛定谔的猫”非常感兴趣。他希望进一步深刻地描述“薛定谔的猫”颜色变化的原理。他可能会假定在猫的身上存在一个尚未被观察到的机制，在每次实验中，这个机制都会预先决定猫最终会变成什么样的颜色；人类开窗观察的过程仅仅是揭示了已经预先确定的颜色。然而，在研究的过程中，友人 A 却发现无论如何都不能消除变色机制对观察方式的依赖：从门还是窗户观察的时候，“薛定谔的猫”颜色发生变化的方式是不一样的！分析了实验数据后，友人 A 百思不得其解，只好来请教我其中的奥妙。听完友人 A 的描述，我会心一笑，知道在“薛定谔的猫”身上捣鬼的，就是量子力学中的互文性。

长久以来，互文性都是量子力学基础研究的核心问题。它是观测到的实验结果对任何潜在理论结构的必然要求，但它有悖常理的性质又激发了人们对量子理论深层物理原理的探索。互文性在量子理论中的核心地位，使得相关研究工作不管从理论层面还是应用层面都具有深刻的意义，而为了研究互文性，首先必须了解它的来龙去脉。本章将首先从基础科学的角度入手，阐明何以互文性是量子力学数学结构的自然推论；而后再从交叉科学的角度讨论，介绍互文性在量子信息处理和量子计算等领域广泛的应用。至于我和友人 A 的故事，将在第 2.2 节中再继续讲完。

^①我将使用稍微修改的“薛定谔的猫”的典故，因为我们显然更为喜爱活着的猫。

2.1 量子力学的数学基础

作为可能是人类有史以来最为成功的自然科学理论,量子力学有着不同寻常的数学形式。整个非相对论量子力学的大厦都建立在非对易的矩阵乘法和 C^* -代数的基础上;了解这些理论基础将可以帮助理解本文的实验到底在尝试解决哪些问题。因此,现在将简要地回顾这些理论的基础知识。

2.1.1 量子态、演化和可观测量的表示

1. 量子态的表示

一个处于纯态的 d 维量子系统 $|\psi\rangle$ 可以使用其对应的态射线描述为 $|\psi\rangle = \sum_{k=1}^d c_k |\phi_k\rangle$, 其中, $|\phi_k\rangle, k \in \{1, \dots, d\}$ 为给定希尔伯特空间 \mathcal{H}^d 中的一组正交基矢, 通常称为计算基矢。在计算基矢下, 我们常将态射线记为矢量形式:

$$|\psi\rangle = (c_1^* \quad c_2^* \quad \cdots \quad c_{d-1}^* \quad c_d^*)^\dagger.$$

另外, 我们使用 Kronecker 符号 $\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$ 将态射线的正交归一条件表述

为 $\langle \phi_j | \phi_k \rangle = \delta_{jk}, \sum_{k=1}^d |c_k|^2 = 1$.

若一个量子系统包含多个处于纯态的子系统 $|\psi_A\rangle_A, |\psi_B\rangle_B, \dots$ 时, 可以使用张量积将整个系统的状态表述为 $|\psi_{AB\dots}\rangle = |\psi_A\rangle_A \otimes |\psi_B\rangle_B \otimes \dots$, 并经常简记为 $|\psi_A\rangle |\psi_B\rangle$ 或 $|\psi_A, \psi_B\rangle$. 然而, 处于纯态的复合系统也可能不能被分解为子系统的直积形式。此时, 我们称该复合系统是纠缠的。对于两个量子比特的系统, 有四个量子态是两体之间纠缠程度最强的, 我们将其称为 Bell 态。它们的数学形式是:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

一个处于混态的量子系统不能被表述为态射线, 但是可以用密度算符 $\hat{\rho}$ 来表述其处于纯态之概率混合的状态:

$$\hat{\rho} = \sum_k w_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|, \quad \sum_k w_k = 1.$$

密度算符可以使用矩阵形式进行展开:

$$\hat{\rho} = \sum_{mn} |\phi_m\rangle \langle \phi_n|,$$

$$\rho_{mn} = \langle \phi_m | \hat{\rho} | \phi_n \rangle = \sum_k w_k \langle \phi_m | \psi_k \rangle \langle \psi_k | \phi_n \rangle.$$

密度算符是一个厄米算符 (Hermitian, 亦即 $\rho^\dagger = \rho$), 且其迹为 $\text{Tr}\hat{\rho} = 1$. 对于一个纯态 $|\psi\rangle$ 而言, 其密度算符就是 $|\psi\rangle\langle\psi|$. 此时, 密度算符对应矩阵的谱仅有一个非零元素。因此通过密度算符的平方可以判断一个密度算符有多么接近于纯态: 定义量子态 $\hat{\rho}$ 的纯度为 $\text{Tr}(\hat{\rho}^2)$; 纯度小于 1 的量子态都是混态 [36]。

2. 量子演化的表示

量子系统在薛定谔方程的约束下演化。最普遍的薛定谔方程形式为:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle,$$

其中 \hat{H} 乃是支配量子系统动力学的哈密顿量 (Hamiltonian). 在量子信息学中, 我们习惯上取 $\hbar = 1$, 从而在今后均省略这一符号。若 \hat{H} 不含时, 则态射线满足的演化规律为 $|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle$, 其中 $U(t) = \exp(-i\hat{H}t)$ 。

在传统上, 所有的哈密顿量都被要求是厄米算符, 这保证了演化后量子态的迹是归一的。然而近年来, 对于非厄米哈密顿量的研究逐渐升温。它描述的是开放系统的动力学, 且包含新奇的物理现象和拓扑性质 [37]。对于非厄米哈密顿量的一种等价描述方法是仍然保证哈密顿量的厄米性, 但是使得演化在虚时间上进行 [38]。对应于这种虚时演化的薛定谔方程形式为:

$$-\frac{\partial}{\partial \mathcal{t}} |\psi(\mathcal{t})\rangle = \hat{H} |\psi(\mathcal{t})\rangle, \quad (2.1)$$

这里, 笔者使用带有斜线的 \mathcal{t} 强调演化在虚时间中进行, 此时, 不含时哈密顿量导致的系统演化算符为

$$U(\mathcal{t}) = \exp(-\hat{H}\mathcal{t}). \quad (2.2)$$

这个演化与么正演化的最大区别是概率幅不归一, 因为它将导致对应哈密顿量本征值为 E_k 的本征态概率幅衰减到初始时刻的 $\exp(-E_k\mathcal{t})$. 然而, 它在量子光学实验中不仅容易通过衰减方便地实现, 而且能够起到一些不可被么正演化替代的作用。在本文第 6 章和第 7 章介绍的工作中, 就大量运用了虚时演化来达到一些特定的实验效果。

3. 可观测量的表示

使用可观测量可以反映量子系统的性质, 并建立与经典物理的对应关系。每个可观测量都可以被表示为一个厄米矩阵, 因此本征值是实数。对应于一个量子系统, 一个可观测量 \hat{O} 的期望值为:

$$\langle \hat{O} \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle.$$

封闭系统的哈密顿量也是一个可观测量, 对应于体系的能量。

每个可观测量 \hat{O} 都可以在其自身对应的表象下被对角化，对角元素即为算符的谱：

$$\hat{O} = \sum_{\lambda} \lambda \hat{\Pi}_{\lambda},$$

其中 $\hat{\Pi}_{\lambda} = \sum_k |\phi_{\lambda,k}\rangle \langle \phi_{\lambda,k}|$ 是向本征值为 λ 的本征态 $|\phi_{\lambda,k}\rangle$ 投影的算符；如果本征值 λ 是非简并的，那么后一个求和只有一个元素，此时 $\hat{\Pi}_{\lambda} = |\phi_{\lambda}\rangle \langle \phi_{\lambda}|$ 。

2.1.2 量子测量：Born 规则和 Lüders 规则

Born 规则给出了对于量子态进行测量的概率结果。对于量子态 $\hat{\rho}$ 而言，对于一个可观测量 $\hat{O} = \sum_{\lambda} \lambda \hat{\Pi}_{\lambda}$ 的测量将以概率 $\text{Pr}(\lambda)$ 得到该可观测量的一个本征值 λ 。其中，概率的计算公式为

$$\text{Pr}(\lambda) = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{\Pi}_{\lambda}).$$

当两个可观测量 \hat{O}_1 和 \hat{O}_2 对易 ($[\hat{O}_1, \hat{O}_2] := \hat{O}_1 \hat{O}_2 - \hat{O}_2 \hat{O}_1 = 0$) 时，两个可观测量可以同时被测量，而不会影响彼此按照 Born 规则给出的测量概率。对于两个不对易的可观测量进行的测量将会影响彼此的值，因此不能同时给出有意义的结果。显然，正交的投影算符是对易的可观测量。

Lüders 规则阐述了量子测量导致量子态变化的方式。具体来说当对于可观测量 \hat{O} 的测量结果为 λ 时，测量将使得被测量的量子系统跃变到其对应的本征态上：

$$\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}' = \frac{\hat{\Pi}_{\lambda} \hat{\rho} \hat{\Pi}_{\lambda}}{\text{Pr}(\lambda)}.$$

2.1.3 Gleason 定理

上面的 Born 规则和 Lüders 规则已经完全描述了量子力学中测量的行为，但是当他们被提出时，都是以公设的形式给出。为何量子力学的测量概率一定是以矩阵乘法的迹这一非常特殊的形式给出呢？接下来要介绍的 Gleason 定理 [16] 就旨在论证这种形式的唯一性。

定理 2.1 (Gleason, 1957) 给定希尔伯特空间 H^d ，当 $d \geq 3$ 时，从一组投影算符 $\Pi = \{\hat{\Pi}_1, \dots, \hat{\Pi}_d\}$, $\sum_k \hat{\Pi}_k = \mathbb{I}_d$ 到一组概率分布 $P = \{p_1, \dots, p_d\}$, $0 \leq p_k \leq 1$, $\sum_k p_k = 1$ 的映射

$$\Pi \rightarrow P,$$

必可被等价地用一个密度算符 $\hat{\rho}$ 表示为

$$p_k = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{\Pi}_k).$$

Gleason 定理的证明过程艰深，在本文中恕不赘述。该定理说明了 Born 规则是唯一可能解释量子测量结果的理论。再考虑到狭义相对论的约束，量子测量导

致的量子态演化就必须由 Lüders 规则确定。因此，Gleason 定理完善了量子测量过程的数学基础。

由于 Gleason 定理要求即使对于纯态，只要不在一个可观测量的本征态上，任何对于该算符的测量也都只能以随机的方式给出结果，因此服从该数学语言的量子力学必须是内禀不确定的。在下一节中我们将看到，这种随机性的要求，对于可能再现量子力学全部预言的隐变量模型所满足的数学形式给出了很强的约束条件。

2.2 隐变量理论与量子互文

一个确定性的隐变量理论是指在一次实验中，一组正交投影测量 Π 的结果是由一个不可知的隐变量 μ 预先给定的。我们只关注确定性隐变量模型。非确定性的隐变量模型可以用多级确定性的隐变量模型构造出来，然而这种构造是冗余的——最终必须有一级确定性的隐变量可以完全描述物理实在，不论这个实在到底是否是可以任何方法被实验观测到。

隐变量理论相当于将量子力学的随机性替换为了可观测量到测量结果的映射：

$$\Pr(\lambda) \rightarrow \int_{\mu} v(\lambda, \Pi, \mu) d\mu.$$

其中，响应函数 $v(\lambda, \Pi, \mu) \in \{0, 1\}$ 决定了对应于隐变量值为 μ 时，正交投影测量 Π 在实验前就可预先确定的测量结果。

非互文隐变量理论是确定性隐变量理论中的一个范式。具体来说，一个本征值为 λ_0 的投影算符 $\hat{\Pi}_0$ 可以属于几个不同的上下文（正交投影测量的选取方式），不妨将其中任意两个记为 Π 和 Π' 。在非互文隐变量理论中，响应函数将与上下文的选取方式无关，这在数学上可以表示为：

$$v(\lambda_0, \Pi, \mu) \equiv v(\lambda_0, \Pi', \mu), \quad \forall \mu. \quad (2.3)$$

换句话说，预先确定的实验结果仅取决被测的投影算符和隐变量本身，而与和投影算符一同构成完整正交测量的其他投影算符无关。

2.2.1 Kochen–Specker 定理

由于 Gleason 定理要求在 $d \geq 3$ 维希尔伯特空间中，所有投影测量的概率都被映射到闭区间 $[0, 1]$ 中。而确定性隐变量理论的映射是离散的——对于单次实验，响应函数只能取 $\{0, 1\}$ 之中的一个，因此两者的数学结构存在不兼容性。Kochen 和 Specker 最早找到一个具体的例子，说明对于不使用完整正交投影算符的非互文隐变量理论，这种数学结构区别导致的矛盾不可调和。正式地说，我

们有：

定理 2.2 (Kochen and Specker, 1967) 量子理论是互文性的。量子测量的隐变量描述必须包含上下文——也就是构成正交测量的所有投影算符——的信息。

当 Kochen 和 Specker 在 50 多年前最初证明上述定理时，他们使用了 117 个态射线对应的投影测量展示了一个非互文隐变量模型与量子力学对测量结果预言之间的矛盾。随着量子信息学的发展，证明过程变得逐渐简单起来。在 2012 年，中国科学技术大学的郁司夏老师和新加坡国立大学的胡祖协老师构造出一个证明，仅使用 13 个投影测量就可以对任何量子态的测量结果排除非互文隐变量理论 [20]，并且该证明最简性的记录已经不可能再被打破 [15]。如果只需要对一些量子态展示与非互文隐变量模型的矛盾，则可以进一步降低要求，使用 5 个投影测量即可完成 [39]。

2.2.2 友人 A 的困惑：Peres–Mermin 方块

上面完全基于量子力学基础和抽象数学的介绍可能仍嫌不够直观。现在，我们回到本章开头“薛定谔的猫”的例子，来阐明何以量子力学无法与非互文隐变量理论兼容。为了研究“薛定谔的猫”在被观察时颜色变化的规律，友人 A 将使用控制变量的方法，建立起毛色与“薛定谔的猫”身上其它可以观测的特点之间的联系。友人 A 发现，这个联系的依赖因素可以完全用“薛定谔的猫”两只眼睛的颜色和两只前爪的肉垫颜色来表示出来。具体来说，“薛定谔的猫”两只眼睛的颜色可以是同为黄色、同为绿色、或者是一只黄色一只绿色；两只爪子的颜色可以是同为粉色、同为黑色、或者是一只粉色一只黑色。

友人 A 还发现，当通过门来正面观察“薛定谔的猫”时，他可以观察的是猫的两只眼睛的颜色，以及两只爪子的颜色是否相同；当通过窗户来侧面观察“薛定谔的猫”时，他可以观察的则是猫每一边眼睛和爪子的颜色。进一步地，友人 A 总结出“薛定谔的猫”颜色变化的下述规律：

1. 当从门口观察时，最后变成白猫的“薛定谔的猫”，两只眼睛和两只爪子的颜色，要么全都相同，要么两者都不同；反之，最后变成黑猫的“薛定谔的猫”，如果瞳色不同，那么爪子的颜色就相同，如果瞳色相同，爪子的颜色就不同。
2. 当从窗户观察时，最后变成白猫的“薛定谔的猫”若一边拥有 (1) 黄色的眼睛和粉色的爪子，或者 (2) 绿色的眼睛和黑色的爪子，则另一边要么有 (a) 绿色的眼睛和粉色的爪子，要么有 (b) 黄色的眼睛和黑色的爪子；若一边拥有 (1) 黄色的眼睛和黑色的爪子，或者 (2) 绿色的眼睛和粉色的爪子，则另一边要么有 (a) 绿色的眼睛和黑色的爪子，要么有 (b) 黄色的眼睛和粉色

的爪子。对于最后变成黑猫的“薛定谔的猫”，情况则是与上面对于白猫的描述刚好相反的。

擅长总结规律的友人 A 将使用一些变量来描述“薛定谔的猫”颜色变化的规律。具体来说，由于“薛定谔的猫”本身的颜色、眼睛的颜色和爪子的颜色都只有两种情况，因此 Bool 型的二值变量就非常适合被用来描述这些关系。友人 A 做出下面的定义：

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_1(\text{左眼的颜色}) : x_1 = +1 \Leftrightarrow \text{左眼为黄色}; x_1 = -1 \Leftrightarrow \text{左眼为绿色} \\ x_2 = x_2(\text{右眼的颜色}) : x_2 = +1 \Leftrightarrow \text{右眼为黄色}; x_2 = -1 \Leftrightarrow \text{右眼为绿色} \\ z_1 = z_1(\text{右爪的颜色}) : z_1 = +1 \Leftrightarrow \text{右爪为粉色}; z_1 = -1 \Leftrightarrow \text{右爪为黑色} \\ z_2 = z_2(\text{左爪的颜色}) : z_2 = +1 \Leftrightarrow \text{左爪为粉色}; z_2 = -1 \Leftrightarrow \text{左爪为黑色} \\ y = y(\text{猫的颜色}) : y = +1 \Leftrightarrow \text{猫为黑色}; y = -1 \Leftrightarrow \text{猫为白色} \end{array} \right. \quad (2.4)$$

友人 A 希望把“薛定谔的猫”颜色变化的规律通过这些变量之间的关系来描述为 $y = y(x_1, x_2, z_1, z_2)$ 。具体来说，当从门口观测时，有：

$$y = -(x_1 x_2)(z_1 z_2). \quad (2.5)$$

当从窗口观测时，有：

$$y = (x_1 z_2)(z_1 x_2). \quad (2.6)$$

可以检验，上面的公式 (2.5) 和公式 (2.6) 分别完全再现了从门口和窗口观测“薛定谔的猫”对其颜色变化造成的影响。然而，友人 A 无论如何也无法再进一步，推导出 $y = y(x_1, x_2, z_1, z_2)$ 这样的关系。他发现，把公式 (2.5) 和公式 (2.6) 的两边分别相乘时，出现了矛盾：

$$+1 = y^2 = -(x_1 x_2)(z_1 z_2)(x_1 z_2)(z_1 x_2) = -(x_1)^2(x_2)^2(z_1)^2(z_2)^2 = -1!$$

也就是说，如果不给出具体是从门口还是窗口观测的话，就根本不能定义一个函数 $y = y(x_1, x_2, z_1, z_2)$ ，用来描述“薛定谔的猫”颜色与其眼睛和爪子颜色之间的关系。

友人 A 把他的所见总结成了图 2.1 中的直观的图表，以进一步描述他的困惑。他发现，想找到一个对于从门口还是从窗口观测都成立的函数关系来描述“薛定谔的猫”变色的情况，等于是在表中的每个格子填进 ± 1 的数字，从而每一行和每一列的变量乘积都应该等于 +1，除了最后一行等于 -1。然而，该问题是无解的。另外，友人 A 仍然相信观测方式应当对“薛定谔的猫”的行为没有影

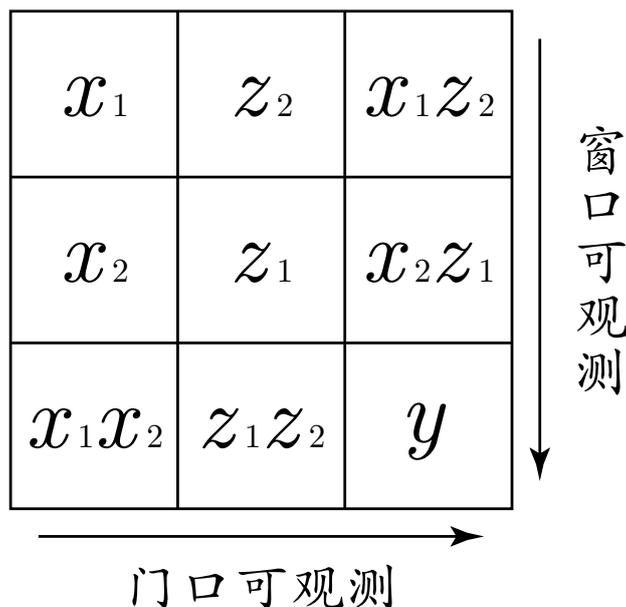


图 2.1 试图使用函数描述“薛定谔的猫”颜色变化时所遭遇的困难。从门口观察时，每次可以测量的是同一行中的变量；从窗口观察时，每次可以测量的是同一列中的变量。每一行和每一列的变量乘积都应该等于 +1，除了最后一行等于 -1。整个方块不可能填进一组值为 ± 1 的数字，满足上面两条要求。

响，因为他发现，在两种观测方式下，猫的颜色、眼睛的颜色和爪子的颜色出现的概率都是完全相等的。

现在，我将开始使用前面介绍的量子力学基础中的一系列知识，开始解答友人 A 的困惑。和日常生活中常常看到的猫不同，“薛定谔的猫”是一个量子世界的生物，对它的描述只能是用一个态矢量或者波函数 $|\psi\rangle$ 来进行。“薛定谔的猫”颜色的特性，都是由一些可观测量在 $|\psi\rangle$ 下的测量结果来给出的。具体的来说，这些可观测量是量子力学基础中极为重要的 Pauli 算符：

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

的组合。它们被 Peres 和 Mermin 最先发现 [4]，也表示成一个 3×3 方块内的格子，因此称这些可观测量为 Peres–Mermin 方块，如图 2.2 所示。我们用 \rightarrow 表示对一个可观测量的测量结果；这些结果与“薛定谔的猫”的颜色的联系为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{x1}(\text{左眼的颜色}) : \sigma_{x1} \rightarrow +1 \Leftrightarrow \text{左眼为黄色}, \sigma_{x1} \rightarrow -1 \Leftrightarrow \text{左眼为绿色}; \\ \sigma_{x2}(\text{右眼的颜色}) : \sigma_{x2} \rightarrow +1 \Leftrightarrow \text{右眼为黄色}, \sigma_{x2} \rightarrow -1 \Leftrightarrow \text{右眼为绿色}; \\ \sigma_{z1}(\text{右爪的颜色}) : \sigma_{z1} \rightarrow +1 \Leftrightarrow \text{右爪为粉色}, \sigma_{z1} \rightarrow -1 \Leftrightarrow \text{右爪为黑色}; \\ \sigma_{z2}(\text{左爪的颜色}) : \sigma_{z2} \rightarrow +1 \Leftrightarrow \text{左爪为粉色}, \sigma_{z2} \rightarrow -1 \Leftrightarrow \text{左爪为黑色}; \\ \sigma_{y1} \otimes \sigma_{y2} \equiv \mathcal{Y}(\text{猫的颜色}) : \mathcal{Y} \rightarrow +1 \Leftrightarrow \text{猫为黑色}, \quad \mathcal{Y} \rightarrow -1 \Leftrightarrow \text{猫为白色}. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

根据 Pauli 算符的对易关系, $[\sigma_{xi}, \sigma_{yj}] = \delta_{ij}\sigma_{zi}$ 可知, 友人 A 所选取的函数, 四个自变量不是都对易的, 因此若想求取 \mathcal{Y} , 寄望于用四个分立的变量 $\{x1, x2, z1, z2\}$ 的尝试一定是徒劳的, 只可能通过图 2.2 最后一行和最后一列中的两组关联函数来完成。

$\sigma_{x1} \otimes \mathbb{I}_2$	$\mathbb{I}_2 \otimes \sigma_{z2}$	$\sigma_{x1} \otimes \sigma_{z2}$
$\mathbb{I}_2 \otimes \sigma_{x2}$	$\sigma_{z1} \otimes \mathbb{I}_2$	$\sigma_{z1} \otimes \sigma_{x2}$
$\sigma_{x1} \otimes \sigma_{x2}$	$\sigma_{z1} \otimes \sigma_{z2}$	$\sigma_{y1} \otimes \sigma_{y2}$

图 2.2 Peres–Mermin 方块。可以说是量子互文性最广为人知, 也是最为精巧的例子, Peres–Mermin 方块是使用 Pauli 算符的乘积取代图 2.1 中的二值变量得到的结果。该方块的每个格子中都是一个 4 维可观测量; 并且对任何量子态而言, 每一行和每一列的可观测量乘积的期望值都等于 +1, 除了最后一行期望值等于 -1。

容易发现, 不管我们从门口或窗口观测, 能同时测量的每一行或者每一列中的量都是对易可观测量, 这与量子力学的要求是相符合的。进行任何观察的概率也确实不依赖于测量的方式。例如, 按照 Born 规则, 测量“薛定谔的猫”左眼颜色为绿色的概率总是

$$\text{Pr}(\text{左眼为绿色}) = \text{Tr}(\Pi_{x1}^- |\psi\rangle\langle\psi|) = \text{Tr}\left(\frac{1 + \sigma_{x1}}{2} |\psi\rangle\langle\psi|\right),$$

与从门口还是窗口测量没有关系。

然而, 量子力学描述下的“薛定谔的猫”已经不再会导致 $+1 = -1$ 类似的悖论了: 按照 Pauli 算符的乘积关系 $\sigma_i\sigma_j = i\epsilon_{ijk}\sigma_k$, 其中 ϵ_{ijk} 是 Levi–Civita 符号, 方块中各行和各列算符对应的测量结果的乘积不仅全都是确定的, 而且也符合友

人 A 对各行各列乘积的观察结果：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{第一行: } \text{Tr}[(\sigma_{x1} \otimes \mathbb{I}_2) \cdot (\mathbb{I}_2 \otimes \sigma_{z2}) \cdot (\sigma_{x1} \otimes \sigma_{z2}) |\psi\rangle\langle\psi|] = +1, \\ \text{第二行: } \text{Tr}[(\mathbb{I}_2 \otimes \sigma_{x2}) \cdot (\sigma_{z1} \otimes \mathbb{I}_2) \cdot (\sigma_{x2} \otimes \sigma_{z1}) |\psi\rangle\langle\psi|] = +1, \\ \text{第三行: } \text{Tr}[(\sigma_{x1} \otimes \sigma_{x2}) \cdot (\sigma_{z1} \otimes \sigma_{z2}) \cdot (\sigma_{y1} \otimes \sigma_{y2}) |\psi\rangle\langle\psi|] = -1, \\ \text{第一列: } \text{Tr}[(\sigma_{x1} \otimes \mathbb{I}_2) \cdot (\mathbb{I}_2 \otimes \sigma_{x2}) \cdot (\sigma_{x1} \otimes \sigma_{x2}) |\psi\rangle\langle\psi|] = +1, \\ \text{第二列: } \text{Tr}[(\mathbb{I}_2 \otimes \sigma_{z2}) \cdot (\sigma_{z1} \otimes \mathbb{I}_2) \cdot (\sigma_{z1} \otimes \sigma_{z2}) |\psi\rangle\langle\psi|] = +1, \\ \text{第三列: } \text{Tr}[(\sigma_{x1} \otimes \sigma_{z2}) \cdot (\sigma_{z1} \otimes \sigma_{x2}) \cdot (\sigma_{y1} \otimes \sigma_{y2}) |\psi\rangle\langle\psi|] = +1. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

这样，关于“薛定谔的猫”颜色变化规律的一切就都已经清楚了。友人 A 在建立描述理论时所遇到的问题，实际上就是非互文隐变量理论描述量子系统时所遇到的困难：想要描述“薛定谔的猫”的颜色如何和眼睛与爪子的颜色关联起来，从门口还是窗口观察至关重要；想要给量子系统做一个隐变量描述，隐变量必须包含测量所在的上下文的信息。

2.2.3 可实验验证的非互文不等式

前面友人 A 的故事已经展示了一个量子力学与非互文隐变量理论的不兼容之处。然而，如何在一个真实的实验中观测到“薛定谔的猫”所携带的互文性呢？Cabello [14] 在 2008 年找到了将 Peres–Mermin 方块中的互文性用统计形式展示出来的方法。考虑图 2.2 每一行和每一列中可观测量的乘积；为方便起见，我们将第一行的三个可观测量分别记为 $\{A, a, \alpha\}$ ，第二行为 $\{B, b, \beta\}$ ，第三行为 $\{C, c, \gamma\}$ 。进一步地，我们考虑下面这个可观测量的线性组合：

$$\text{PM} := \langle ABC \rangle_\psi + \langle abc \rangle_\psi + \langle \alpha\beta\gamma \rangle_\psi + \langle Aa\alpha \rangle_\psi + \langle Bb\beta \rangle_\psi + (-\langle Cc\gamma \rangle_\psi). \quad (2.9)$$

按照非互文隐变量 (NCHV = noncontextual hidden variable) 理论的要求，每次实验前，所有的可观测量都已经有了预先给定的，与测量上下文选择方式无关的结果 ± 1 。那么通过遍历这 9 个基础变量可能的 2^9 种取值组合，我们发现无论如何选取每个变量的值，都不可能使得公式 (2.9) 中的六个单项式全部为正。换句话说，下面的不等式：

$$\text{PM} \stackrel{\text{NCHV}}{\leq} 4. \quad (2.10)$$

对任何非互文隐变量理论都成立。然而按照量子力学 (Q = quantum theory) 的计算， $\forall \psi$, $\text{PM} \stackrel{\text{Q}}{=} 6$ 。因此，公式 (2.10) 是一个态无关的非互文隐变量不等式，它将被任何量子态——即使是最大混态 $\hat{\rho} = \mathbb{I}_4/4$ ——所违背。Cabello 的工作激起了大量的实验研究进展；在接下来的 1 年内，该理论就分别由 Kirchmair et al. [25] 在离子阱系统和 Amselem et al. [26] 以及 Liu et al. [40] 在光学系统中得到了检验。

迄今为止，Peres–Mermin 方块构造的非互文隐变量不等式仍是在不同物理系统中展示量子理论互文性的一个最常用的工具。

现在稍微评论一下如何通过公式 (2.10) 在实验上进行互文性的测试；我们会发现尽管非互文不等式的形式简单，实验上却有诸多可能的误区。这里，笔者将引用 Budroni et al. [41] 等人非常精彩的讨论。首先，由于图 2.2 中的每个可观测量都可以写成两个单体算符的直积形式，因此它们的测量似乎可以作为两个单独量子比特的局域测量来完成，这样总的来说，每个算符的测量会得到四个结果而非两个简并的结果。然而，这样做的代价是我们将出现与友人 A 相同的问题——为非对易变量同时取值，因此我们将看到非互文隐变量理论所预期的结果，而不再能够从实验上检测互文性。

其次，由于图 2.2 中的每一行和每一列的可观测量都可以同时测量，因此原则上对于每一行和每一列，总可以找到一组测量，使得该整体测量的每个结果都能够确定每个单独可观测量的值。以最后一行为例， C, c, γ 的共同本征态恰好就是四个 Bell 态，因为

$$\begin{aligned} (\sigma_x \otimes \sigma_x) |\Phi^+\rangle &= +|\Phi^+\rangle, (\sigma_y \otimes \sigma_y) |\Phi^+\rangle = -|\Phi^+\rangle, (\sigma_z \otimes \sigma_z) |\Phi^+\rangle = +|\Phi^+\rangle; \\ (\sigma_x \otimes \sigma_x) |\Phi^-\rangle &= -|\Phi^-\rangle, (\sigma_y \otimes \sigma_y) |\Phi^-\rangle = +|\Phi^-\rangle, (\sigma_z \otimes \sigma_z) |\Phi^-\rangle = +|\Phi^-\rangle; \\ (\sigma_x \otimes \sigma_x) |\Psi^+\rangle &= +|\Psi^+\rangle, (\sigma_y \otimes \sigma_y) |\Psi^+\rangle = +|\Psi^+\rangle, (\sigma_z \otimes \sigma_z) |\Psi^+\rangle = -|\Psi^+\rangle; \\ (\sigma_x \otimes \sigma_x) |\Psi^-\rangle &= -|\Psi^-\rangle, (\sigma_y \otimes \sigma_y) |\Psi^-\rangle = -|\Psi^-\rangle, (\sigma_z \otimes \sigma_z) |\Psi^-\rangle = -|\Psi^-\rangle. \end{aligned}$$

因此，如果使用一个 Bell 态测量，实现对于四个 Bell 态的区分，那么刚好就可以同时测出三个待测算符 C, c, γ 的值。然而不难发现，Bell 态测量的结果必然反推出乘积 $\langle Cc\gamma \rangle \equiv -1$ ，再对其它行/列做类似的讨论就会发现，根本不可能对九个可观测量在非互文隐变量理论下给出任何自洽的取值。出现这种情况的原因是当我们使用 Bell 态测量来计算 $\langle Cc\gamma \rangle$ 时，已经暗含了量子力学使用的 Clifford 代数，因此基于此假设进行的互文实验是循环论证。相反，必须对单独的每个可观测量分别进行不导致系统被摧毁或退相干的测量，才能准确地反映出互文实验的主旨。这将对互文实验提出相当高的技术要求。

下面再介绍两个非常著名的非互文隐变量不等式。在 Cabello 工作同年的稍早时候，Klyachko et al. [39] 构造出一个非常简单的模型。设 A_0, \dots, A_4 是本征值为 ± 1 的二值算符，且 $[A_i, A_{i+1 \bmod 5}] = 0$ ，那么

$$\text{KCBS} := \langle A_0 A_1 \rangle_\psi + \langle A_1 A_2 \rangle_\psi + \langle A_2 A_3 \rangle_\psi + \langle A_3 A_4 \rangle_\psi + \langle A_4 A_0 \rangle_\psi \stackrel{\text{NCHV}}{\geq} -3.$$

该不等式被称为 KCBS 不等式。然而，我们取图 2.3 中的五个三维射线 $|\nu_k\rangle, k \in \{1, \dots, 5\}$ 和量子态 $|\psi\rangle$ ，并取 $A_k = 2|\nu_k\rangle\langle\nu_k| - \mathbb{I}$ ，则有 $\text{KCBS}(|\psi\rangle) = 5 - 4\sqrt{5} \approx -3.94$ 。注意 KCBS 不等式的违背是态依赖的，这与先前态无关的情况相反，需要借助

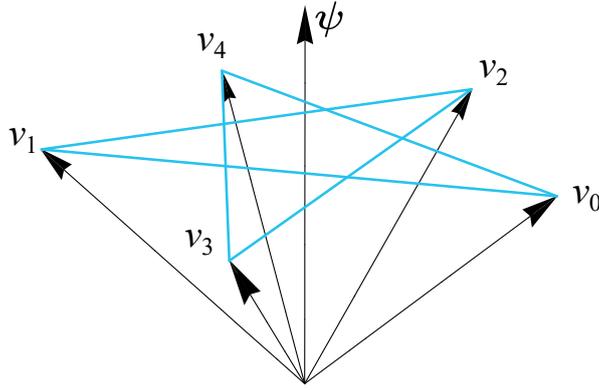


图 2.3 实现 KCBS 不等式最大违背所使用的矢量。具体的坐标: $|\psi\rangle = \{0, 0, 1\}^\dagger, |v_k\rangle = \{\sin\theta \cos k\varphi, \sin\theta \sin k\varphi, \cos\theta\}^\dagger$, 其中 $\theta = \arccos(1/\sqrt{5}), \varphi = 2\pi/5$. 图片取自参考文献 [41]。

特定的量子态才能观测到互文性。KCBS 不等式的这一性质使其可以用于检验量子态是否与目标量子态接近 [42]。

在 2012 年, 中国科学技术大学的郁司夏老师和新加坡国立大学的胡祖协老师构造出一个证明, 仅使用 13 个三维希尔伯特空间中的投影测量就可以对任何量子态的测量结果排除非互文隐变量理论 [20]。这 13 个矢量的设置和他们之间的正交关系如图 2.4 所示。笔者借助前面定义的反应函数的概念, 在此复述作者们十分巧妙的证明过程。在非互文隐变量理论中, 一个矢量 \hat{x} 的响应函数值为 $v(\hat{x}) = 1$, 就表示对于该矢量对应的投影测量 $\Pi_{\hat{x}}$ 结果将得到 1. 考虑以下两种情形:

1. 如果某次实验将得到 $v(\hat{h}_0) = 1$ 和 $v(\hat{h}_1) = 1$, 那么按照正交关系必有 $v(\hat{y}_2^\pm) = 0, v(\hat{y}_3^\pm) = 0$. 但是, 按照三维矢量的完备性, 必有 $v(\hat{z}_2) = 1, v(\hat{z}_3) = 1$, 也就是隐变量理论要求两个正交矢量的投影算符取值同时为 1, 矛盾。
2. 如果某次实验将得到 $v(\hat{h}_1) = 1$ 和 $v(\hat{h}_2) = 1$, 那么按照正交关系必有 $v(\hat{y}_1^\pm) = 0, v(\hat{y}_2^\pm) = 0$, 这样 $v(\hat{z}_1) = 1, v(\hat{z}_2) = 1$, 同样出现矛盾。

再考虑到对称性, $v(\hat{h}_0), v(\hat{h}_1), v(\hat{h}_2), v(\hat{h}_3)$ 四个响应函数只能有一个为 1, 因此

$$YO := \langle |\hat{h}_0\rangle\langle\hat{h}_0| + |\hat{h}_1\rangle\langle\hat{h}_1| + |\hat{h}_2\rangle\langle\hat{h}_2| + |\hat{h}_3\rangle\langle\hat{h}_3| \rangle_\psi \stackrel{\text{NCHV}}{\leq} 1.$$

但是, 由于 $|\hat{h}_0\rangle\langle\hat{h}_0| + |\hat{h}_1\rangle\langle\hat{h}_1| + |\hat{h}_2\rangle\langle\hat{h}_2| + |\hat{h}_3\rangle\langle\hat{h}_3| = 4\mathbb{I}_3/3$, 因此对任何量子态 $|\psi\rangle$, $YO \stackrel{Q}{=} 4/3$, 态无关地违背非互文隐变量不等式。另外, Cabello et al. [15] 证明该构造是最简的: 使用少于 13 个矢量构成的投影测量, 不可能构造出量子力学互文性的态无关证明。

2.2.4 图论与非互文不等式

上一小节的最后一个例子已经展示了如何使用投影测量对应的向量之间的相互正交关系构造非互文隐变量不等式。这种方法具有很强的代表性，是目前互文性理论研究中的一个重要手段。下面介绍如何通过一组给定的投影测量，计算非互文隐变量理论和量子理论所允许的最强关联。

定义 2.1 给定一组抽象代数空间中的测量 $\tilde{\Pi}_k, k \in \{1, \dots, n\}$ ，它们的互斥图 $G = G(V, E)$ 是一个无向图，定义为：

- 图的顶点集合 $V(G)$ 与抽象测量的集合 $\tilde{\Pi}$ 构成一个双射， $|V(G)| = n$ 。
- 图的边连接互斥的测量所对应的顶点： $(i, j) \in E(G), \forall \tilde{\Pi}_i \tilde{\Pi}_j = 0$ 。

对于量子测量来说，此时的测量算符就可以由希尔伯特空间中的态射线对应给出： $\tilde{\Pi}_k \rightarrow \hat{\Pi}_k = |\nu_k\rangle\langle\nu_k|$ 。对于非互文隐变量理论，不能显示地写出测量算符的形式，但是互斥的广义测量算符对应的响应函数满足一个非常简单的关系： $v(\tilde{\Pi}_i, \mu) + v(\tilde{\Pi}_j, \mu) \leq 1, \forall \mu, (i, j) \in E(G)$ 。设若不然，则至少有一点 μ 使两个测量都响应为 1，与互斥性矛盾。

定义 2.2 无向图 $G = G(V, E)$ 的一个独立集是其一些顶点的集合，这些顶点两两之间没有边连接。一个无向图的独立数 (independence number) 定义为其最大

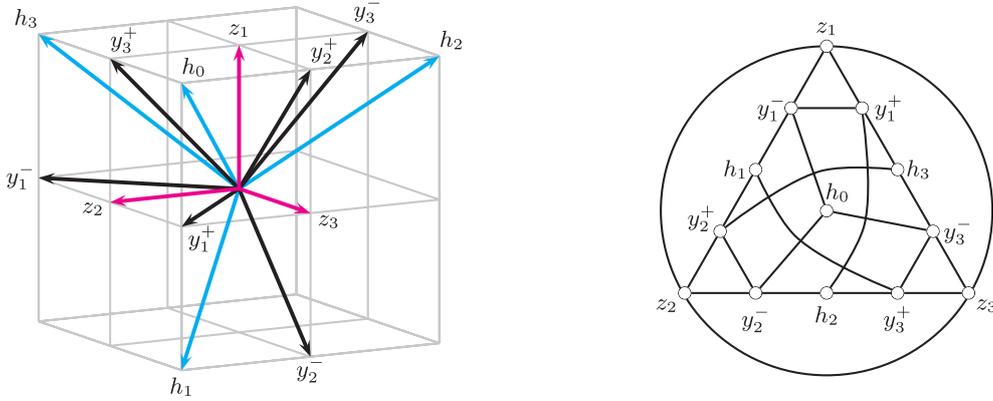


图 2.4 使用 13 个矢量证明态无关的互文性。左图为矢量具体的坐标（未归一化）： $\hat{y}_1^- = \{0, 1, -1\}^\dagger, \hat{y}_2^- = \{-1, 0, 1\}^\dagger, \hat{y}_3^- = \{1, -1, 0\}^\dagger, \hat{y}_1^+ = \{0, 1, 1\}^\dagger, \hat{y}_2^+ = \{1, 0, 1\}^\dagger, \hat{y}_3^+ = \{1, 1, 0\}^\dagger, \hat{h}_0 = \{1, 1, 1\}^\dagger, \hat{h}_1 = \{-1, 1, 1\}^\dagger, \hat{h}_2 = \{1, -1, 1\}^\dagger, \hat{h}_3 = \{1, 1, -1\}^\dagger, \hat{z}_1 = \{1, 0, 0\}^\dagger, \hat{z}_2 = \{0, 1, 0\}^\dagger, \hat{z}_3 = \{0, 0, 1\}^\dagger$ 。右图为所使用矢量之间相互正交的关系。相连接的两个矢量相互正交，因此他们的响应函数 v 必不可同时为 1；成闭合三角形的三个矢量构成完备基，因此他们的响应函数 v 有且只有一个为 1。图片取自参考文献 [20]。

独立集的势：

$$\alpha(G) := \max |S|, \quad S \subseteq V(G), \quad \forall i, j \in S, (i, j) \notin E(G). \quad (2.11)$$

定义 2.3 (Lovász, 1979) 无向图 $G = G(V, E)$ 的正交表示 [43] 可以是满足以下条件的任意一组射线 $\{|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$: $\forall (i, j) \in E(G), \langle v_i | v_j \rangle = 0$. 一个无向图的 Lovász 数 (Lovász number) 定义为一个矢量在该图所有可能的正交表示中所有射线上投影的模之和的最大值 [44] :

$$\vartheta(G) := \max_{v_k, \psi} \sum_{k=1}^n |\langle v_k | \psi \rangle|^2. \quad (2.12)$$

有了关于互斥图和图论中常数的定义，我们接下来叙述它们与非互文隐变量理论和量子关联之间的关系。

定理 2.3 (Cabello, Severini, and Winter, 2014) 一组满足互斥图 G 的广义测量 $\tilde{\Pi}$ ，在非互文隐变量理论中概率之和的上确界为互斥图的独立数 $\alpha(G)$ ，在量子理论中概率之和的上确界为互斥图的 Lovász 数 $\vartheta(G)$. 特别地，由于对任意的图，Lovász 数总是不小于独立数，因此，

$$\Pr(\tilde{\Pi}) \stackrel{\text{NCHV}}{\leq} \alpha(G) \stackrel{\text{Q}}{\leq} \vartheta(G). \quad (2.13)$$

定理 2.3 具有较强的普适性，经常被称为研究互文性的 CSW 方法。

在本文的第 4 章和第 7 章，笔者将大量使用 CSW 方法构造并测试非互文不等式。此时，需要考虑到实验中实现的测量并不完全符合互斥图中所给定的关系；可能两个原则上应当正交的投影测量，实际上确实有一定的概率给出同时为 1 的结果。如何将这种非完美性包含在公式 (2.13) 的范畴之内呢？Cabello et al. [15] 和 Cabello [45] 进一步证明，对于不完美正交关系下的测量，以下的非互文隐变量不等式成立：

$$\sum_{k \in V(G)} \Pr(\tilde{\Pi}_k) - \sum_{(i,j) \in E(G)} \Pr[v(\tilde{\Pi}_i) = 1, v(\tilde{\Pi}_j) = 1] \stackrel{\text{NCHV}}{\leq} \alpha(G). \quad (2.14)$$

这样，加上对于第二项的测量，CSW 方法就可以被广泛地用于进行量子互文的实验研究。

使用 Mathematica 或 Python 等软件都可计算 CSW 方法中所需的图论常数。其中，独立数的求解是一个计算复杂度达到 NP-complete 的问题，因此在图结构复杂时，其计算将消耗大量的时间。另一方面，Lovász 数的求解则可以使用凸优化有效地进行。

下面我们通过两个具体的例子来展示其使用方法。首先，我们再次考虑图 2.4 中的互斥图 G_{Y0} ，计算结果表明，

$$\alpha(G_{Y0}) = \vartheta(G_{Y0}) = 5.$$

这个计算结果可以理解为： $\alpha(G_{Y0}) = 5$ 表示如果对互斥图 G_{Y0} 的顶点做染色，要求没有任何两个相邻的顶点同时被染色，那么至多能够染色 5 个顶点； $\vartheta(G_{Y0}) = 5$ 表示如果找一组向量与 G_{Y0} 中的顶点一一对应，且两个相邻顶点对应的向量相互正交，那么一个向量与这一组向量之中每一个的内积平方和的上限为 5。由于 $\alpha(G_{Y0}) = \vartheta(G_{Y0})$ ，直接使用 CSW 方法并不能得到量子理论在 G_{Y0} 中互斥结构的互文性。然而我们可以将无向图的各个顶点加权；这相当于是不同的顶点重复不同的次数。Xiao et al. [46] 证明，当取顶点 $\hat{h}_k, k \in \{0, 1, 2, 3\}$ 的权重为 2， \hat{y}_k^\dagger 和 $\hat{z}_k, k \in \{1, 2, 3\}$ 的权重为 3 时，得到的新互斥图 G'_{Y0} 具有最大的量子-经典关联比 $\vartheta/\alpha = 35/33$ ，这个差距已经用来在实验上观测到态无关的互文性。

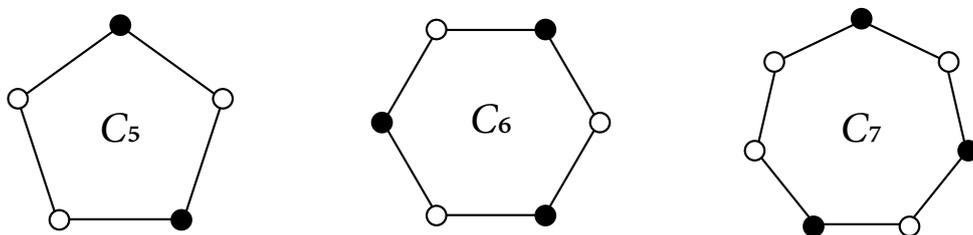


图 2.5 长度为 5、6、7 的环形图。从顶点的染色情况可看出，不可能再对任何一个顶点染色，且没有任何两个相邻的顶点同时被染色。因此， $\alpha(C_5) = 2, \alpha(C_6) = \alpha(C_7) = 3$ 。

其次，我们考虑一个更一般的情况：顶点数为 n 的环型图 C_n 。在图 2.5 中，给出了对应 $n = 5, 6, 7$ 时环形图的具体形式。环形图的独立数易于求得：每间隔一个顶点，可以取出一个顶点染色，再注意到边界条件，即知 $\alpha(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$ 。另一方面，环形图的 Lovász 数是一个已有的结论：

$$\vartheta(C_n) = \begin{cases} \frac{n \cos(\pi/n)}{1 + \cos(\pi/n)}, & n \text{ is odd,} \\ n/2, & n \text{ is even,} \end{cases} \quad (2.15)$$

对于包含奇数个顶点 $n = 2m + 3$ 的环形图 $C_{2m+3}, m \in \mathbb{Z}^+$ 而言，总有 $\alpha(C_n) < \vartheta(C_n)$ 成立。因此，根据这些环形图构造的互斥结构蕴含了一类有意义的非互文隐变量不等式。

2.3 互文性在量子信息学中的意义

互文性一直以来都是量子信息学的研究热点问题，许多量子信息领域的实际应用都以互文性作为基础。例如 Spekkens 的团队展示了其用于不经意传输 [47] 和量子态鉴别 [48] 的功效，Gühne 等人发现对于非互文不等式的违背可以用来估计系统的最小维度 [49]，马雄峰老师团队将互文性用于随机性的扩展，从而产

生量子力学保证的可信随机数，并分别与金奇免老师团队和潘建伟老师团队合作，在离子阱系统 [50] 和光学系统 [51] 中取得了实验实现。受到篇幅和本文的主题所限，笔者只简单地介绍互文性的 5 个较为具有代表性的意义：互文性与量子力学中波函数实在性的关系、互文性与经典因果模型对量子测量描述的矛盾、互文性与前-后选择型量子佯谬的关系、互文性与非定域性的关系、以及互文性在量子计算中的应用。笔者已经在实验上研究了后面 4 个问题；关于最后 3 个问题的讨论构成了本论文的主体。

2.3.1 与波函数实在性的关系

量子力学与各种隐变量理论的核心矛盾之一就是：波函数的本质是什么？它到底是对应物理实在，抑或是只是人们对深层物理实质的知识的一种描述？若使用任何异于波函数本身的隐变量，就在一定程度上表明，波函数本身并非是直接对应物理实在，而是对于物理实在的一种描述。然而，只有物理实在与波函数不是一一对应的时候，隐变量理论才给出比量子力学更多的信息。因此，有必要研究这种对应关系。我们使用 Harrigan et al. [52] 中的定义来讨论这一对应关系。

定义 2.4 (Harrigan and Spekkens, 2010) 假定隐变量 μ 与物理实在一一对应，取两个不同的波函数 $\psi(\mu), \phi(\mu)$. 若 $\text{supp}(\psi) \cup \text{supp}(\phi)$ 总是零测集，则称量子理论是 ψ -本体的 (ψ -ontic), 反之，若存在测度非零的一段 μ , 使得 $\psi(\mu)\phi(\mu) \neq 0$, 则称量子理论是 ψ -知识的 (ψ -epistemic).

如果量子理论是 ψ -知识的，那么波函数将不再如哥本哈根诠释中那样直接对应物理实在。Leifer et al. [53] 进一步定义，如果 Born 规则中量子态投影测量的概率可以完全由隐变量的重合度给出，那么量子理论就是完美 ψ -知识的 (maximally ψ -epistemic). ψ -本体和 ψ -知识的概念以及和隐变量模型的对应关系可以由图 2.6 清晰地体现。

在 Harrigan 和 Spekkens 的理论提出后不久，Pusey, Barrett 和 Rudolph 就构造出一个具体的例子 [54]，支持量子力学是 ψ -本体的，也就是说波函数应当与物理实在一一对应。然而证明过程要用到很强的假设。随后 Leifer et al. [53] 进一步分析了他们的研究，找到了一个更令人信服的解释：

定理 2.4 (Leifer and Maroney, 2013) 完美 ψ -知识的理论必须是非互文的。

因此，量子力学的互文性支持波函数直接与物理实在相对应。Leifer 和 Maroney 的理论随后得到 Barrett et al. [55] 等人的进一步发展，通过量子态之间可区分性的关系构造出一个非互文隐变量不等式，并已在光学系统中直接观测到了实验违背 [56]。

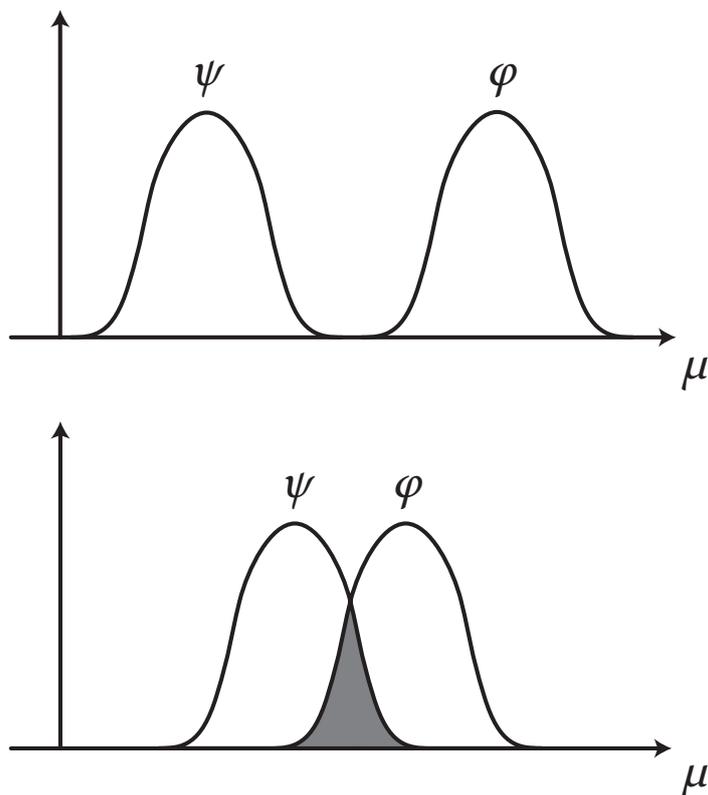


图 2.6 ψ -本体和 ψ -知识模型的概念。上图和下图分别给出了 ψ -本体和 ψ -知识模型中，量子态 ψ, ϕ 与物理实在 μ 之间的对应关系。

2.3.2 与经典因果模型的矛盾

许多情况下，一些随机变量之间存在相关性，比如黄金和石油的价格往往出现正相关。然而，相关性并不说明金价和油价之间存在直接的因果机制。实际上，由于国际政治和军事形势等因素，将导致投资者同时希望购入黄金和原油，应对能源危机和取得财产的保值。因此金价和油价的关联实际上是国际政治和军事形势这个共同原因导致的结果。

发展因果模型就是为了描述变量之间因果机制的概念模型。在 Pearl [57] 的图形式的因果模型中，用一个有向无环图来表示变量之间的因果关系。变量 x 用节点来表示，变量之间的因果关系则用节点之间带有单向箭头的连线表示。我们称单向箭头的起点和终点连接的两个节点为一对父节点 (parent node) 和子节点 (child node)。在因果模型描述下，每个变量的取值仅和其父节点的取值，以及一个不与任何节点相关的局域的随机变量有关。因此，所有随机变量的概率分布可以写为马尔科夫分解 (Markovian) 的形式：

$$\Pr(\mathbf{x}) = \prod_k \Pr[x_k | \text{parent}(x_k)].$$

我们可以使用因果模型来描述互文实验。仍然考虑 Peres–Mermin 方块，因为

可以同时测量每一行或者每一列中的 3 个变量，因此总的来说可以选择 6 种测量方式。我们将测量方式的选取用随机变量 Ω 表示，具体可观测量记为 X_1, X_2, X_3 ，相应的测量结果为 A_1, A_2, A_3 。另外，测量使用的物理态记为 Λ 。如果我们使用一个模型来描述实验过程，那么测量方式决定了可观测量，而可观测量和物理态决定了测量结果。因此，整个实验可以用有向无环图表示为图 2.7 的因果结构。

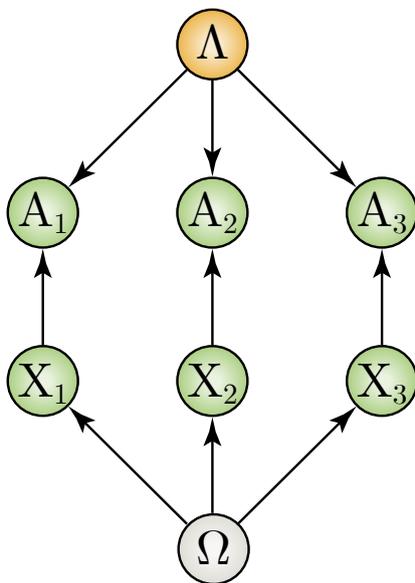


图 2.7 Peres–Mermin 方块实验的因果模型。

利用因果结构的马尔科夫条件，测量结果满足的概率分布可以写成以下的乘积形式：

$$\Pr(A_1, A_2, A_3) = \iint \Pr[A_1|X_1(\Omega), \Lambda] \Pr[A_2|X_2(\Omega), \Lambda] \Pr[A_3|X_3(\Omega), \Lambda] d\Omega d\Lambda.$$

然而，Cavalcanti [58] 发现，根据 Fine [8] 定理，分解为乘积形式的概率分布总可以写成所有测量结果的联合概率分布；其中每个可观测量的值都是该联合分布的一个边际概率。所有变量的联合概率分布总可以用一个非互文隐变量模型来描述。进一步完善后的证明表明 [59]：

定理 2.5 (Pearl and Cavalcanti, 2021) 经典因果模型不能描述量子力学的互文性。所有经典因果模型对于基于连续测量的互文实验都将给出符合非互文隐变量模型的概率分布。

上面的表述只简要地陈述等价关系，而省去了关于因果模型忠实性 (faithfulness) 的一些约束。从因果模型的角度考虑互文性的意义在于跳出了隐变量理论的框架，从而显示了量子力学与一大类更加广泛的经典数学模型——例如贝叶斯网络——对物理现象的描述之间的矛盾。对于这一矛盾的讨论催生了量子因果理论这一蓬勃发展的交叉学科领域 [60]，在此由于主题所限，恕不展开探讨。

2.3.3 与前-后选择型量子佯谬的关系

1987 年, Vaidman et al. [61] 在 *Physical Review Letters* 发表一篇寥寥 2 页出头, 却耸人听闻的论文: 一个吝啬的皇帝 (mean king) 要求一位科学家同时确定一个自旋 $1/2$ 粒子的 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, 问科学家应该如何实现? 这看起来是不可能的, 因为 3 个 Pauli 算符两两不对易。然而 Vaidman 等人考虑一个前-后选择的系统。具体来说, 将待测系统和一个辅助系统纠缠, 而后发送给皇帝; 在皇帝将系统返回之后再进行一次 Bell 态测量, 这样, 科学家就确实可以获知系统在皇帝手中时, 3 个 Pauli 算符分别如何取值。

从 1987 年起, 一大批类似的问题被构造出来, 它们集中讨论在量子演化过程中量子系统的佯谬, 也就是反直觉现象。我们称这一类有确定的初态和末态的量子系统为前-后选择的系统。这其中, 最具代表性的问题包括三个自旋 $1/2$ 的系统何以两两处在自旋相反的状态, 从而违反鸽笼原理 [62], 以及在第 6 章中将要讨论的量子实体与其属性分离的现象, “量子柴郡猫” 现象 [63]。

前-后选择型量子佯谬实际上是量子互文性的一个推论。针对“吝啬的皇帝”问题, Mermin [64] 最先指出该问题中科学家的手段实际上是给出了一个可观测测量在两个不同上下文中协调的结果, 因此也就相当于揭示了非互文隐变量理论给出的结果。Mermin 说明该方法不能够用来给出 Peres-Mermin 方块中一整行/列算符的乘积, 因为此时复数乘法已经不再足以再现 Clifford 代数中的运算法则了。Leifer et al. [65] 进一步发展了该结果, 说明所有前-后选择型量子佯谬都可以被等价地归结为一个量子力学互文性的证明, 从而这些佯谬实际上都是互文性的推论。对于上面提到的吝啬皇帝问题, 鸽笼佯谬和柴郡猫佯谬与互文性的联系, 郁司夏老师和胡祖协老师 [66] 以及 Waegell et al. [67] 给出详尽的讨论。

2.3.4 与非定域性的关系

Bell [68] 非定域性可能是量子力学中的一个较互文性更广为人知的奇异性质, 它表明对于量子力学的隐变量描述必须是全局的; 即使处在类空间隔下的两个量子实体之间的关联, 也不可能被两个定域的隐变量描述, 而必须使用一个全局的非定域隐变量来进行描述。使用粗浅的语言, 量子非定域性可以表述为“对一方测量结果的解释不能仅由本地的隐变量解释, 而必须依赖于另一方测量方向的选取和得到的结果”。近年来, 量子力学的 Bell 非定域性已经获得了决定性的实验支持 [69-72]。

量子非定域性是量子互文性的推论。非定域性反映的矛盾总可以归结为互文性在类空间隔下的结果。这里只考虑两体任意维系统中非定域性与互文性的关系, 对于多体情况是非常类似的。对于一个非定域系统, 狭义相对论保证了一方的测量算符对另一方完全没有影响, 因此一方的测量总可以写为与另一方单

位算符直积的全局形式: $\hat{\Pi}_\alpha^1 = \hat{\Pi}_\alpha \otimes \mathbb{I}_{d_2}$, $\hat{\Pi}_\beta^2 = \mathbb{I}_{d_1} \otimes \hat{\Pi}_\beta$, 而且不论投影算符具体如何选取, 必有 $[\hat{\Pi}_\alpha^1, \hat{\Pi}_\beta^2] = 0$ 为对易的。这样, 在一个非互文隐变量理论中, $\hat{\Pi}_\alpha^1$ 的分布就应当完全不依赖于 $\hat{\Pi}_\beta^2$ 的选取和测量结果, 从而量子非定域性就可以被认为是互文性在类空间隔下的特殊形式。

证明 Bell 非定域性常用的手段是从实验上违反一个定域隐变量不等式, 通常称为 Bell 不等式。任何 Bell 不等式都可以解释为非互文等式, 并且目前已知一些方法可以将非互文不等式转换为量子理论违反的 Bell 不等式 [73-74]。另一方面, 把 Bell 不等式中测量的互斥结构使用单体系统实现, 可能得到更强的量子关联 [75], 甚至还可以降低实现关联所需的系统维度。在第 4 章中, 笔者将详细介绍关于这方面的研究。在第 5 章中, 我们研究的对象则是另一种由 Greenberger, Horne, 和 Zeilinger (GHZ) [76] 以及 Hardy [77] 开创的, 研究 Bell 非定域性和互文性的“无不等式方法”。

2.3.5 在量子计算中的应用

量子计算有多种可能的实现途径, 例如基于门操作或基于测量; 基于离散变量或基于连续变量。一个有趣的现象是人们已经发现在多种量子计算的实现方式中, 互文性都扮演了重要的角色, 尤其是与提升量子计算的通用性具有直接的关联。这里简单介绍 3 项具有代表性的理论结果。

1. 在连续变量量子计算中, 必须使用 non-Gaussian 的态或操作才能取得量子计算的通用性, 这相当于要求系统的 Wigner 准概率至少在一个非零测集上为负 [78]。Spekkens [79] 指出, 这个要求与互文性是等价的。
2. 在基于测量的量子计算中, 通过在一个图态 [80] 上执行多次量子测量, 借助量子隐形传态来实现门操作的效果。Raussendorf [81] 证明若基于测量的量子计算能够对于 Boolean 函数的计算取得高的成功率, 则计算的过程必须是互文性的, 而不能被非互文隐变量模型所再现。进一步地, Bravyi et al. [82-83] 证明借助互文性可以在线路深度有限且包含噪声的量子线路中, 对特定问题取得相比经典计算机的速度优势。
3. 使用魔术态萃取 (magic state distillation [84]) 可以从多份含噪声的量子态中, 仅用 Clifford 操作就提取出一个最远离 Clifford 算符本征态的“魔术态”, 从而实现通用量子计算 [85]。Howard et al. [22] 证明, 可以通过 CSW 方法, 使用向所有 Clifford 算符本征态的投影算符构造一个非互文不等式; 违背该不等式的量子态才可被用于执行魔术态萃取。因此, 执行基于魔术态萃取的通用量子计算的能力, 就取决于量子态所包含的互文性资源。笔者将在第 7 章中以一个 3 维量子系统为例, 详细介绍该方法以及基于它进行的实验研究。

从以上讨论可以看出，互文性不仅是量子力学基础的重要概念，且在借助量子信息技术实现的量子计算等应用具有关键作用。因此，对于该方向的研究同时具有深刻的基础研究和实际应用价值。到这里，对量子互文理论基础的介绍就告一段落。接下来，我们转向实验平台，介绍如何通过光学平台的资源和技术，实现对于互文性的研究。

第3章 线性光学中的量子信息

在“第二次量子革命”中，随着人们操作单个量子系统的能力得到飞越，量子信息技术逐渐开始在各个领域取得较为广泛的应用。在这一阶段，尤其是最近10年以来，物理系统则对于量子信息技术具体发展的方向起到了决定性的作用。例如用于展示量子计算相比于经典计算在特定问题上优越性的两个代表性实验——随机线路取样和 Gaussian 玻色采样 [86]——中，设计的问题都是分别为超导量子系统和光量子系统量身定做的。因此，物理平台的性质和特点对于能够解决的问题至关重要。

现在介绍用光学系统来进行量子信息领域研究的方法。在第1章中已经提到，光学系统具有高精度、高维度、多自由度等一系列优点，同时也具有缺少光子间的有效相互作用这一显著缺点。因此，本章将着重讨论如何扬长避短，利用光学系统的优点实现有意义的量子力学基础、量子模拟和量子计算方向的研究，同时构造出等效的两量子比特门操作，从而避免缺少耦合的制约。笔者将从量子系统的制备、演化和测量三方面介绍光学平台这一实验系统，同时对于使用的技术手段辅以必要的理论描述。本章的最后一节介绍如何使用基础的光学操作，将量子信息完全掩蔽在两个光子的关联之中，从而单个光子不再携带关于先前编码子空间中的任何信息。

在本章中，我们将在多处用到二次量子化的语言来描述实验过程，因为这是表述量子干涉最自然的方法；然而，当需要建立实验与理论部分的对应时，我们将重新转回第2章中已经介绍的一次量子化框架中。借助这种转换，笔者希望能够提供理论与实验两种视角下对光学实验立体而清晰的认识。

3.1 量子信息在光子上的编码

3.1.1 光子对的产生和探测

在线性光学系统中，要想得到一个单独的光子或一对关联的光子，最常用的方法就是使用非线性晶体中参量下转换的过程。该过程的示意图如图3.1所示。一个泵浦光 (pump) 光子通过一个具有非零非线性系数 $\chi^{(2)}$ 的晶体，转化为一个信号光光子和一个闲置光光子。该过程如图3.1所示。支配参量下转换过程发生的哈密顿量可以表示为：

$$H = g(a_p a_s^\dagger a_i^\dagger + \text{h.c.}).$$

其中, g 是耦合强度, a_m 和 $a_m^\dagger, m \in \{p, s, i\}$ 是模式为 m 的光子的湮灭和产生算符, 它们将使得对应模式光场中的光子数分别减少或增加 1 个, 具体来说就是: $a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$, 其中, $|n\rangle$ 代表光子数为 n 的 Fock 态。而模式则由角标 p, s, i 给出, 分别对应泵浦光、信号光和闲置光。h.c. 表示取括号内其余部分的厄米共轭。一般来说, 信号光和闲置光的波长只需满足能量守恒条件 $1/\lambda_p = 1/\lambda_s + 1/\lambda_i$ 。然而在本文中, 只使用简并输出的参量下转换过程, 此时 $\lambda_s = \lambda_i = 2\lambda_p$ 。通过参量下转换得到关联的光子对后, 就可将其进一步编码, 用于量子信息实验^①。

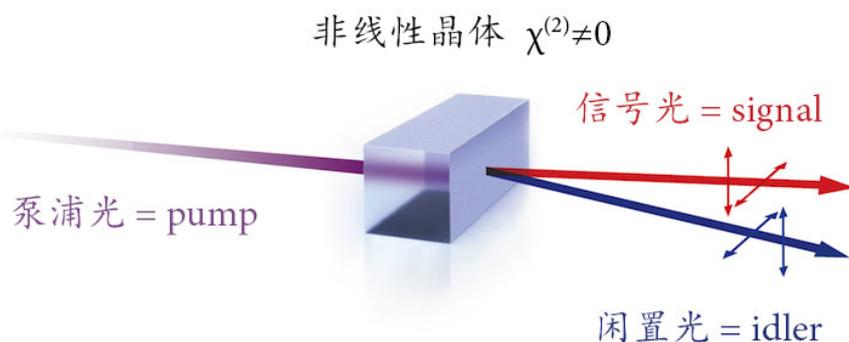


图 3.1 参量下转换过程的示意图。

对于光子的测量就是指探测到生成的光子并研究其统计性质。在量子信息实验中, 我们使用单光子雪崩探测器 (single-photon avalanche detector) 或者光电倍增管将单个光子转换成时域分布非常窄的电信号进行探测。这样, 一段时间内到达探测器的总光子数和每个光子的到达时间就可以被记录下来。在使用光子对的实验中, 我们进行符合测量, 也就是使用两个探测器分别探测两个光子, 并且只考虑到达时间相同 (或者相差一个光路/电路长度导致的固定的延时) 的光子之间符合的统计规律。因为只有到达时间相同的光子才来自同一次参量下转换过程, 可以使用理论预期的量子态描述; 只有一个光子到达的测量结果将被丢弃。再借助量子态层析 [87] 和量子过程层析 [88] 等手段, 可以分析到达光子所处的量子态以及光子经历之演化的相关信息。

传统上, 如果只使用一个光子完成所有操作, 另一个光子就在被产生后立即被单光子计数探测, 然后也使用符合计数手段给出在光路中演化的光子的统计性质。这种技术被称为预报 (heralded) 单光子。然而该方法得到的光子演化规律, 与直接使用衰减的激光进行单光子计数没有区别, 其优势仅在于排除了探测器没有光子时产生暗计数的影响。我们的单光子探测器每秒产生的暗计数在 80 个

^①参量下转换不属于线性光学的范畴——正如非线性晶体的名字所建议的一样。然而, 线性光学实验的整座大厦几乎都建立在参量下转换/四波混频光源之上。

左右，因此，笔者都使用衰减的激光或者固体缺陷产生的光子进行单光子实验，几乎不会影响实验精度。

3.1.2 偏振、路径、时间窗口和空间模式自由度

物理系统借助不同的自由度来编码量子信息。自由度指的是可以物理系统中可以自由取值的物理量，宏观的比如位置、动量；微观的比如原子中电子的能级和角动量。光子的自由度非常丰富，例如内禀的偏振将决定光子携带的电场方向、轨道角动量将决定波函数相位的形貌、空间模式和时间模式将决定光子演化的特性等等。图 3.2 给出一个这些光学实验中最常用到的光子自由度的示意图。

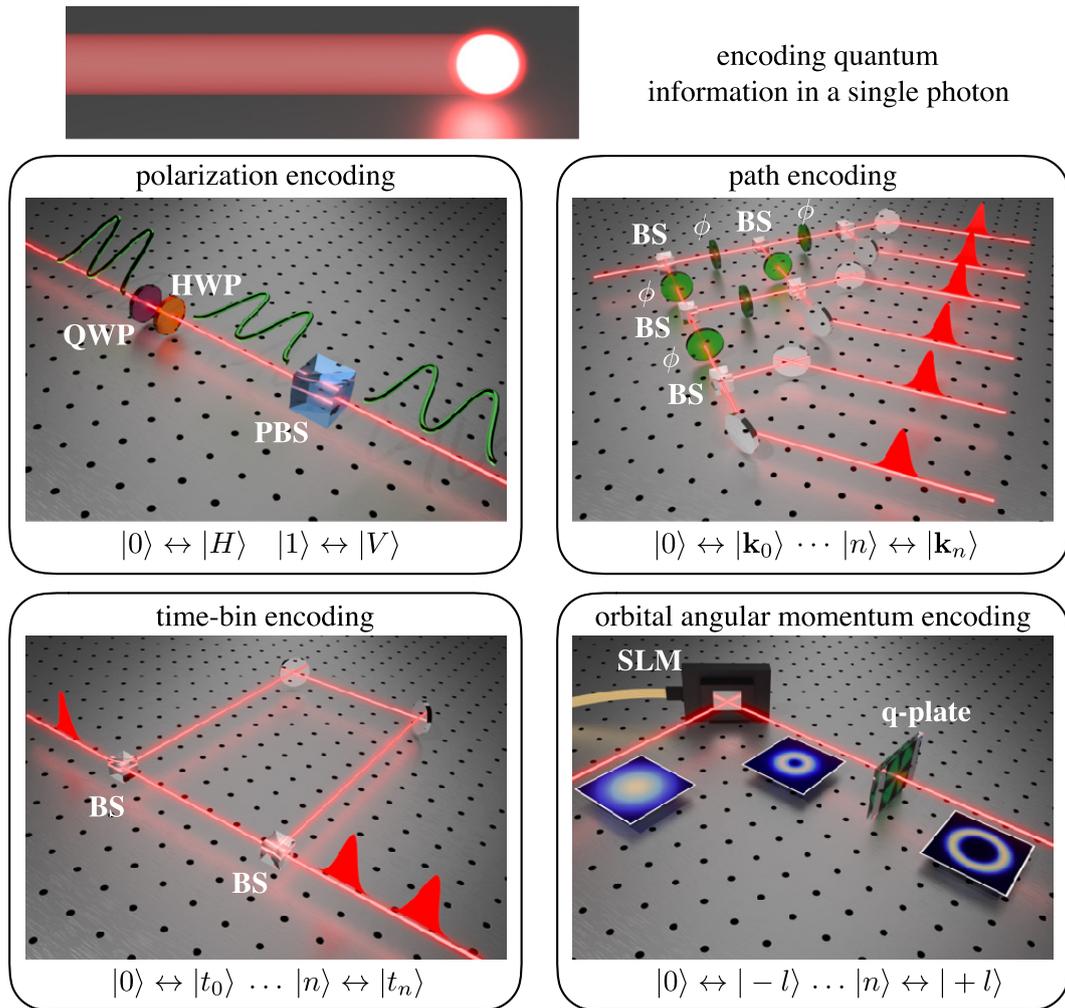


图 3.2 光子可用于编码量子信息的一些自由度。从上到下，从左到右依次为：偏振自由度、路径自由度、时间窗口自由度和轨道角动量自由度。图片取自参考文献 [89]。

接下来介绍各个自由度的使用方法。偏振自由度是传统上最常用的自由度，它携带一个天然的量子比特：光子的水平 (horizontal) 和竖直 (vertical) 偏振可以与 2 维希尔伯特空间中的两个计算基矢一一对应： $|0\rangle \leftrightarrow |H\rangle, |1\rangle \leftrightarrow |V\rangle$ 。这里顺便提到，对于这种量子比特系统，有一个特别形象的表示方法，就是借助 $SU(2)$ 和

SO(3) 群的同构性，把任意的量子比特态 $\hat{\rho}_2$ 展开成

$$\hat{\rho}_2 = \frac{1}{2} (\mathbb{I}_2 + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z).$$

从而用坐标 (x, y, z) 表示成一个单位球上或球内的点。这种表示传统上称为 Bloch 球 [36]。纯态对应的点在球面上，其中 $|H\rangle$ 和 $|V\rangle$ 就分别对应北极和南极点，而混态对应的点在球内。在量子信息领域，经常用这种方法来表述量子比特态。

偏振自由度受到关注的另一个原因是两光子的偏振纠缠可以从参量下转换过程中制备。例如可以连续泵浦两个输出光子集中在一个点上的 beam-like II 型非线性晶体 [90]，在中间翻转第一次泵浦产生光子的偏振，而后再加入补偿使两次泵浦产生的波函数不可分辨，就可以生成一个明亮的纠缠源 [91]。该技术的示意图如图 3.3 所示，它输出的双光子态形式是：

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HV\rangle - e^{i\phi}|VH\rangle).$$

另外，可以通过偏振依赖的双光子干涉使得一片非线性晶体产生的两个光子出现偏振纠缠，这种技术将在下一节中被详细介绍。

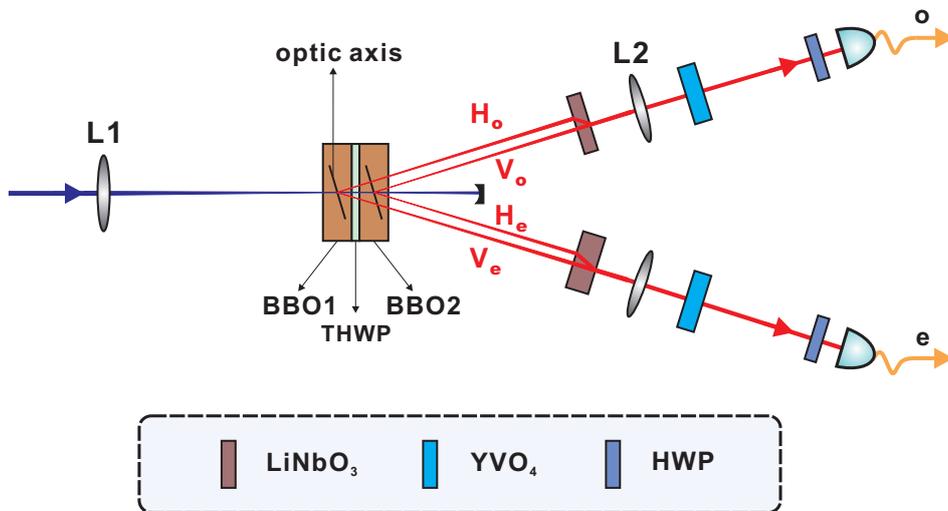


图 3.3 偏振量子比特纠缠的制备。BBO: 产生 II 型参量下转换的非线性晶体，该过程产生偏振方向垂直的一对光子；THWP: 真零级半波片，用来使信号光和参考光偏振翻转 90 度；LiNbO₃: 铌酸锂晶体，用来补偿两次泵浦产生参量光的空间分离；YVO₄: 钒酸钇晶体，用来补偿补偿两次泵浦产生参量光的时间分离。图片取自参考文献 [91]。

路径自由度是指用光子不同的传播方向编码量子信息。光子的每个传播方向 \mathbf{k} 都可被用于承载一个希尔伯特空间的维度，因此原则上该方法可以编码无限高维的量子信息。另外，容易实现路径与偏振量子比特的耦合，从而可以方便地实现两者之间的相互转换。这个自由度主要需要解决的问题是长度抖动引起

的不同路径之间的相位噪声，这在两个路径之间间距较大时问题尤为明显。解决的方法包括主动锁相和被动相位稳定。主动锁相是指在路径之间加入光线拉伸器等元件，利用 Pound–Drewer–Hall 技术 [92] 等方法引入反馈控制，使得不同路径之间的相位差一直保持恒定。被动相位稳定是指使用例如图 3.4 中的光束偏移器 (beam displacer) 阵列或错位式 Sagnac 干涉仪等架构构建位置非常接近，且通过的光学元件几乎全同的路径量子态，从而抑制其中出现的相位抖动。近年来涌现的空间光调制 [93] 和超透镜阵列 [94] 等技术手段进一步增加了被动相位稳定下路径自由度编码的空间模式量子态的可扩展性。

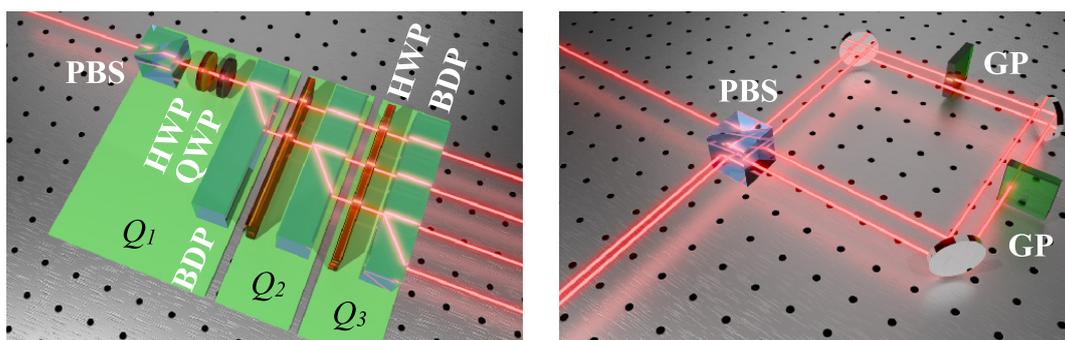


图 3.4 路径量子态被动相位稳定的方法。左图：使用光学分束器（双折射晶体）阵列实现偏振和路径量子比特的耦合以及路径之间较近的分隔。右图：使用错位的 Sagnac 干涉仪将顺时针和逆时针行进的光束编码到两个不同的路径状态。图片取自参考文献 [89]。

时间窗口量子态指将量子态编码到光子到达探测器的时间早晚。使用光学延迟线的架构，原则上也可以实现任意高维的量子态制备。该系统非常适合应用于研究量子行走 [95] 等问题，并且具有噪声相对较小的优势，因此在量子通信中有着很好的应用前景 [96]。这个自由度主要需要解决的困难在于实现非计算基矢之间叠加态的测量需要设计一些较好的方法。最后，轨道角动量量子态是使用光子的轨道角动量——直观的说也就是波函数（波前）的形貌（相位）——来编码量子信息 [97]。这也构成一个无限维的希尔伯特空间，并且方便实现与偏振量子比特的耦合 [98]。这个自由度主要需要解决的困难是如何对于轨道角动量大的光子进行精确和高效的操作和探测，并解决其在光学系统中演化时相对于轨道角动量小的光子损耗更大的问题。

3.2 光子的演化和操作

我们发现光子的不同自由度具有迥然不同的特点，例如有些精度高，有些扩展性好，有些方便测量。当前线性光学实验研究的一个趋势就是使用多个自由度，从而结合它们的优点，同时扩大系统的量子比特数。其中，由于偏振量子比

特的操作和测量可以方便地使用波片定量，而且与其他所有自由度之间都可以相互转换，因此经常被作为一个媒介使用，构造“偏振 + everything”形式的多自由度混合系统。

3.2.1 偏振量子比特的操作

一般使用波片来实现单个偏振量子比特的任意么正操作。波片是一种双折射晶体，它对于偏振在其光轴方向的光子引入一定的相位延迟。在光学实验中，标准化使用的波片是半波片和四分之一波片，它们对于波长 λ 等于自身工作波长的光子引入的相位延迟幅度分别为 $\lambda/2$ 和 $\lambda/4$ 。当光轴朝向与水平方向夹角为 θ 时，他们将在光子的偏振态 $\alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$ 上引入如下的演化：

$$U_{\text{HWP}}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}, \quad U_{\text{QWP}}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + i \sin^2 \theta & (1-i) \sin \theta \cos \theta \\ (1-i) \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta + i \cos^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Englert et al. [99] 证明，偏振自由度上任意的演化 U_{arb} 都可被分解为两个四分之一波片中间夹一个半波片的形式，通过改变波片的角度来实现（至多差一个整体相位）：

$$U_{\text{arb}} = \exp(i\phi) U_{\text{QWP}}(\theta_3) U_{\text{HWP}}(\theta_2) U_{\text{QWP}}(\theta_1). \quad (3.1)$$

因为光子之间没有相互作用，所以两个光子不可能以 100% 的效率完成受控双光子门操作。然而，有办法概率性地实现双光子的纠缠。现在介绍一个非常实用的双光子偏振纠缠门：熔接门 (fusion gate)。它的作用是借助符合探测，实现双光子偏振态向 $|\Phi^\pm\rangle$ 的投影 [100-101]。

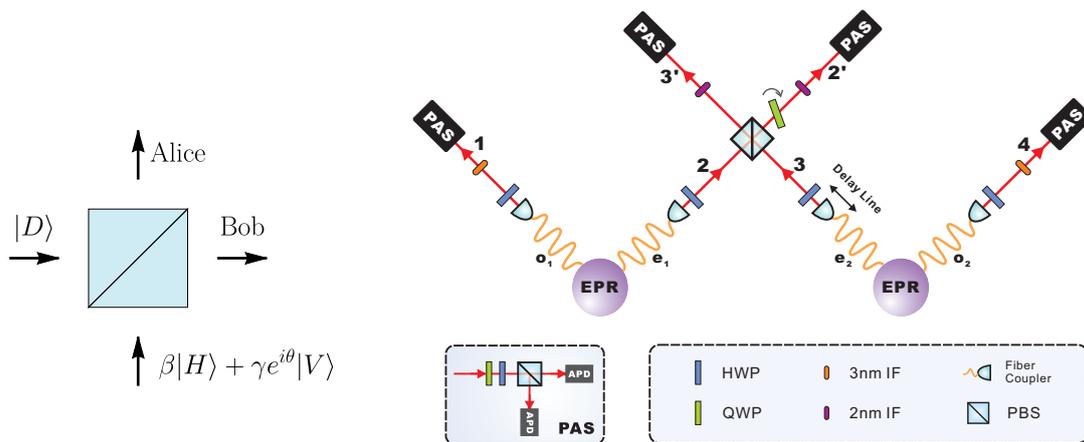


图 3.5 光子熔接门。左图为光子熔接门的工作原理分析。右图为使用光子熔接门制备四光子偏振纠缠的 GHZ 态。右图取自参考文献 [91]。

如图 3.5 所示，在光子熔接门中，使用一个偏振分束棱镜 (PBS = polarisation beam splitter) 来实现双光子干涉。偏振分束棱镜有两个输入口和两个输出口，它将

按照光子的偏振状态改变其行进的方向：水平偏振的光子将沿原方向行进，而竖直偏振的光子则将被反射 90 度至另一个输出口。我们将向上方观察者 Alice 和右方观察者 Bob 行进光子的产生算符分别记为 a_{κ}^{\dagger} 和 b_{κ}^{\dagger} ，其中下标的槽位 $\kappa \in \{H, V\}$ 表示光子的偏振状态。那么在偏振分束棱镜上发生以下的演化，可以被归结为光子产生算符之间的相互转化：

$$\begin{cases} a_H^{\dagger} \rightarrow a_H^{\dagger}, & a_V^{\dagger} \rightarrow ib_V^{\dagger}, \\ b_H^{\dagger} \rightarrow a_H^{\dagger}, & b_V^{\dagger} \rightarrow ia_V^{\dagger}. \end{cases} \quad (3.2)$$

其中，反射光子对应的产生算符得到一个虚数单位对应的额外相位 $\pi/2$ ，这是菲涅尔 (Fresnel) 定律作用的结果。在光子熔接门之后，搭配使用符合探测，选出 Alice 和 Bob 各接收到一个光子的情况。我们考虑两个光子分别从两个入口进入到熔接门时，产生算符的四种可能组合分别的演化情况：

$$a_H^{\dagger}b_H^{\dagger} \rightarrow a_H^{\dagger}b_H^{\dagger}, \quad a_H^{\dagger}b_V^{\dagger} \rightarrow ia_H^{\dagger}a_V^{\dagger}, \quad a_V^{\dagger}b_H^{\dagger} \rightarrow ib_H^{\dagger}b_V^{\dagger}, \quad a_V^{\dagger}b_V^{\dagger} \rightarrow -a_V^{\dagger}b_V^{\dagger}. \quad (3.3)$$

这表明，只有输入光子所处的偏振状态同为 $|H\rangle$ 或 $|V\rangle$ 时，输出光子才产生 Alice 和 Bob 的符合探测。考虑到两个竖直偏振光子得到的额外 π 相位，熔接门造成的两光子演化就可以写为：

$$\Pi_{\text{fusion}} = |HH\rangle\langle HH| - |VV\rangle\langle VV|. \quad (3.4)$$

因此，熔接门实现了两个光子向纠缠基下的投影。注意：两个输入的光子不仅需要波长相同，而且到达偏振分束棱镜的时间也必须完全相同，从而保证输出端来自两个光子的波函数不可分辨，提高量子干涉的可见度。接下来用图 3.5 中的两个例子来说明熔接门的应用：

1. **光子对的纠缠生成。** — 考虑简并参量下转换产生两个光子。将其中一个制备到偏振的最大叠加态 $|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$ ，另一个处于任意的偏振态 $|\psi_2\rangle = \beta|H\rangle + \exp(i\theta)\gamma|V\rangle$ ， $|\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$ 。经过熔接门的作用，双光子态将演化为：

$$|D\rangle|\psi_2\rangle \xrightarrow{\text{fusion}} |\psi_{12}\rangle = \Pi_{\text{fusion}}|D\rangle|\psi_2\rangle = \beta|HH\rangle - \exp(i\theta)\gamma|VV\rangle. \quad (3.5)$$

得到一个纠缠态；特别是 $|\beta| = |\gamma|$ 时， $|\psi_{12}\rangle$ 是一个最大纠缠态。注意这里已经重新归一化了态，用来补偿熔接门 50% 效率所造成的影响。

2. **多光子纠缠态的制备。** — 考虑两对独立的纠缠光子对（例如，两套图 3.3 中纠缠光子源产生的两对光子）之间的相互作用。初始时，两个光子对都处在 Bell 态 $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle)$ 上。熔接门作用在 2 号和 3 号光子，因

此系统整体的演化乃是 $\Pi_{1234} = \mathbb{I}_2 \otimes \Pi_{\text{fusion}} \otimes \mathbb{I}_2$. 因此, 在熔接门之后, 四光子态将演化为:

$$|\Phi^+\rangle^{\otimes 2} \xrightarrow{\text{fusion}} \Pi_{1234} |\Phi^+\rangle^{\otimes 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HHHH\rangle - |VVVV\rangle).$$

这种两个截然相反量子态的线性组合构成的多体纠缠态常被称为 GHZ 态, 以纪念 Greenberger, Horne 和 Zeilinger 在多体量子纠缠领域开创性的研究。上面的多光子纠缠态技术看起来似乎可以无限扩展, 然而实际上由于参量下转换过程的发生是概率性的, 因此两个非线性晶体同时发生参量下转换的概率更小, 导致多光子实验中光子计数率往往极低。因此, 发展双光子多自由度的技术就显得更为突出。下面转向介绍实现光子偏振与其他自由度耦合的技术。

3.2.2 偏振与其他自由度的耦合

(1) 空间自由度

光束偏移器架构是目前编码光的路径量子态和将其与偏振量子比特耦合的主流技术手段。光束偏移器的原理如图 3.6 所示, 它是一块切割的方解石晶体, 其光轴方向与切割面夹 42.7° 角, 导致偏振方向平行于光轴在晶体内分量的光子偏离其行进方向, 向光轴方向偏折 0.100 rad ; 偏振方向垂直于光轴的光子则不受影响。因此, 使用多块长度相同的光束偏移器, 在中间辅以偏振控制, 可以实现光子波函数在多个路径态 $|k\rangle$ 中的按需分布。举一个例子, 假设将光束偏移器的光轴放置在竖直方向, 那么光子经过光束偏移器后就将出现下述的演化:

$$|H\rangle_{\text{pol}} |k\rangle_{\text{path}} \rightarrow |H\rangle_{\text{pol}} |k\rangle_{\text{path}}, \quad |V\rangle_{\text{pol}} |k\rangle_{\text{path}} \rightarrow |V\rangle_{\text{pol}} |k+1\rangle_{\text{path}}.$$

这里, 态射线的下标用来区分偏振态和路径态。另外, 还可以通过计算基矢与物理态之间的对应关系, 如 $|2k\rangle \leftrightarrow |H\rangle_{\text{pol}} |k\rangle_{\text{path}}$, $|2k+1\rangle \leftrightarrow |V\rangle_{\text{pol}} |k\rangle_{\text{path}}$, 使用偏振自由度和路径自由度共同编码一个高维量子态。图 3.6 展示该编码方式的一个案例。最后, 由于光子的路径实际上可以取垂直于光子传播方向二维平面上的任意点, 因此路径自由度的编码可以非常灵活。

(2) 时间自由度

若将光束偏移器替换为光轴垂直于传播方向的双折射晶体, 那么光子通过时就会出现垂直和平行光轴方向的偏振分量之间波函数在时间上的分离, 因此可以方便地将实现偏振控制的时间自由度波函数操作。这里的操作和空间模式非常接近, 因此就不再赘述。然而, 时间和空间自由度主流的探测手段较为不同。这将在下一节中被清晰的展现。

(3) 轨道角动量

随着光场调控技术的发展, 已经可以实现对于单个光子波前方便的调控, 使得光子在轨道角动量模式上携带量子信息。操作轨道角动量模式可以使用多种

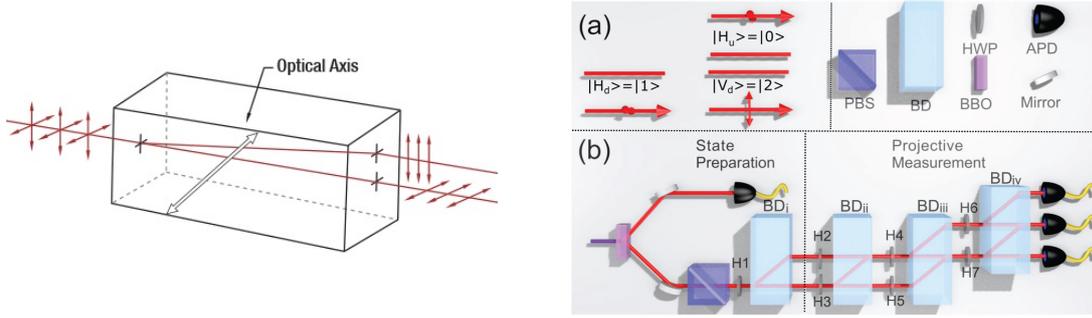


图 3.6 使用光束偏移器编码空间模式量子态。左图：光束偏移器的原理。右图：使用光束偏移器编码一个偏振-路径复合三维量子态并实现按需演化。右图取自参考文献 [102]

光学元件。涡旋相位片是最早被使用的元件，一个 ℓ -阶涡旋相位片携带一个极坐标分布为 $\exp(i\ell\theta)$ 的相位，使得轨道角动量模式不依赖偏振地增加或减少 ℓ 。一个 ℓ -阶的 q -片则可以产生偏振与轨道角动量耦合的演化。对于输入偏振态分别为 $|L\rangle_{\text{pol}} = (|H\rangle + i|V\rangle)/\sqrt{2}$ 和 $|R\rangle_{\text{pol}} = (|H\rangle - i|V\rangle)/\sqrt{2}$ 的光子， q -片产生的演化为

$$|L\rangle_{\text{pol}} |l\rangle_{\text{OAM}} \rightarrow |R\rangle_{\text{pol}} |l + 2\ell\rangle_{\text{OAM}}, \quad |R\rangle_{\text{pol}} |l\rangle_{\text{OAM}} \rightarrow |L\rangle_{\text{pol}} |l - 2\ell\rangle_{\text{OAM}}.$$

最后，使用空间光调制器 (spatial light modulator) 可以直接向一个偏振为 $|H\rangle$ 的光子加载一个任意的相位 $\phi(r, \theta)$ ，并且有办法使得该相位演化成任意的轨道角动量波函数 [103]。

3.2.3 虚时演化和非厄米哈密顿量

在第 2 章最初，已经介绍了虚时演化的概念。传统上，线性光学实验只考虑么正演化，甚少显式地运用虚时演化。有时候这被归结为量子力学不可克隆定理 [104] 的要求：线性光学中，量子态的概率幅不可能增加，否则就需要克隆未知状态的光子。然而这并不限制对于谱完全为非负实数的哈密顿量执行虚时演化。中国科学技术大学量子信息重点实验室的李传锋、许金时研究组对虚时演化有深入的实验研究，并尤其擅长将其用于光量子模拟领域 [105-107]。接下来的讨论力图说明虚时演化在光学实验中的广泛应用和巨大潜力。

考虑已经对角化的哈密顿量 $H = \sum_k \lambda_k |k\rangle\langle k|$ ， $\lambda \geq 0$ 。使用公式 (2.2) 计算得到系统的演化为：

$$U(t) = \sum_k \exp(-\lambda_k t) |k\rangle\langle k|. \quad (3.6)$$

这相当于按照本征值的大小分别衰减各个本征态的概率幅。我们对于不同的 t 大小，分 3 种情况来讨论该衰减操作的应用。

(1) $t \rightarrow +\infty$: 求解哈密顿量的基态

在此情况下，所有对应于哈密顿量非 0 本征值的本征态均被抛弃：

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} U(t) = \sum_k \delta_{0\lambda_k} |k\rangle \langle k|.$$

此时， $U(t)$ 作用在波函数上的效果是将其向哈密顿量的基态子空间中投影。这个结论不依赖哈密顿量是否一开始就是对角化的。对于不逐项对易的哈密顿量而言，量子系统的基态求解是一个非平凡的问题。借助大相互作用时间下的虚时演化，不经过具体对角化的过程就实现向哈密顿量基态子空间的投影，因此可以用连续的虚时演化实现算法冷却 [105]，模拟退火等量子算法。若感兴趣的物理量不依赖演化过程的绝热性，甚至可以使用少数几个虚时演化求解该物理量，例如 Berry 相位 [106-107]。

 (2) $t = O(1)$: 特殊功效的门操作

在此情况下，哈密顿量每个本征态经历的衰减是可以控制具体幅度的，它们为实现特殊功效的门操作提供了强有力的工具。这里举一个著名的例子。考虑 $H = |H\rangle \langle H|$ ， $t = \ln(3)/2$ 。该演化的作用结果是 $|H\rangle \rightarrow |H\rangle/\sqrt{3}$ ， $|V\rangle \rightarrow |V\rangle$ ，相当于以 $2/3$ 的比例丢弃水平偏振的光子，而总是保留竖直偏振的光子。在实验上，这描述了一个光学分束器，其对于水平和竖直偏振光子的透过率分别为 $T_H = 1/3$ ， $T_V = 1$ 。接下来，我们展示 Langford et al. [108]，Kiesel et al. [109] 和 Okamoto et al. [110] 等人开发的一个技巧：用这种分束器构造两光子的受控相位门 (CZ = controlled-Z gate)，它是一个两光子纠缠门（注意 $\text{CZ} = (\mathbb{I}_2 \otimes H) \cdot \text{CNOT} \cdot (\mathbb{I}_2 \otimes H)$ ），其演化矩阵为：

$$\text{CZ} = \hat{\Pi}_z^+ \otimes \mathbb{I}_2 + \hat{\Pi}_z^- \otimes \sigma_z = \text{Diag}(1, 1, 1, -1). \quad (3.7)$$

实现受控相位门的实验装置如图 3.7 所示。和前面分析熔接门相似，我们直接计算所有可能的输入态对应的光子生成算符的演化结果：

$$\begin{aligned} \alpha_H^\dagger \beta_H^\dagger &\xrightarrow{\text{PDBS}_o} \alpha_H^\dagger \beta_H^\dagger && \xrightarrow{\text{PDBS}_{a/b}} \frac{1}{3} \alpha_H^\dagger \beta_H^\dagger, \\ \alpha_H^\dagger \beta_V^\dagger &\xrightarrow{\text{PDBS}_o} \alpha_H^\dagger \left(i\sqrt{\frac{2}{3}} \alpha_V^\dagger + \sqrt{\frac{1}{3}} \beta_V^\dagger \right) && \xrightarrow{\text{PDBS}_{a/b}} \frac{1}{3} \alpha_H^\dagger \beta_V^\dagger \left\{ +i\sqrt{\frac{2}{3}} \alpha_H^\dagger \alpha_V^\dagger, \right\} \\ \alpha_V^\dagger \beta_H^\dagger &\xrightarrow{\text{PDBS}_o} \left(i\sqrt{\frac{2}{3}} \beta_V^\dagger + \sqrt{\frac{1}{3}} \alpha_V^\dagger \right) \beta_H^\dagger && \xrightarrow{\text{PDBS}_{a/b}} \frac{1}{3} \alpha_V^\dagger \beta_H^\dagger \left\{ +i\sqrt{\frac{2}{3}} \beta_V^\dagger \beta_H^\dagger, \right\} \\ \alpha_V^\dagger \beta_V^\dagger &\xrightarrow{\text{PDBS}_o} \left(i\sqrt{\frac{2}{3}} \beta_V^\dagger + \sqrt{\frac{1}{3}} \alpha_V^\dagger \right) \left(i\sqrt{\frac{2}{3}} \alpha_V^\dagger + \sqrt{\frac{1}{3}} \beta_V^\dagger \right) && \xrightarrow{\text{PDBS}_{a/b}} -\frac{1}{3} \alpha_V^\dagger \beta_V^\dagger. \end{aligned} \quad (3.8)$$

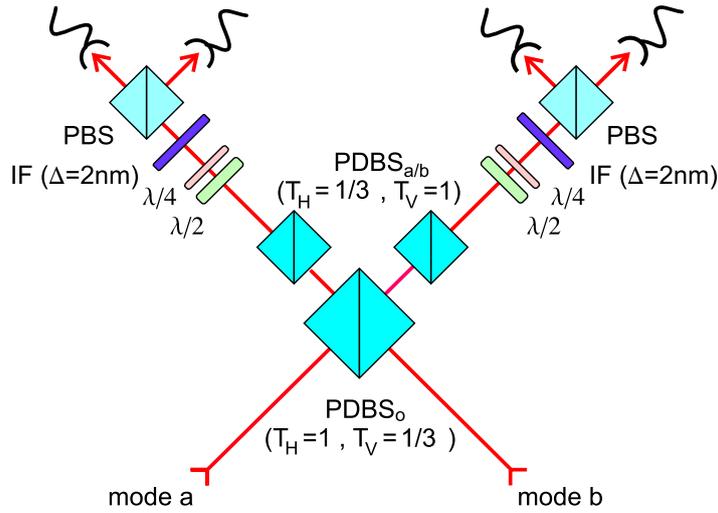


图 3.7 使用虚时演化构造受控相位门。PDBS 是实现虚时演化的偏振半分束棱镜， T_H, T_V 分别对应水平和垂直偏振光子在偏振半分束棱镜上的透过率。图片取自参考文献 [109]

上面已经使用大花括号和红色字体标出了符合探测时被丢弃的项。可以与 CZ 门的定义直接对比看出，该光路以 1/9 的成功率实现了任意偏振态之间的受控相位门。原则上，只要有一个两比特受控门，加上单比特任意操作就可以实现通用量子计算。因此该装置体现了虚时演化在推动量子计算发展方面的潜力。

(3) $t \rightarrow 0^+$: 求解量子态的弱值

在此情况下，演化算符中的指数函数可以使用 Maclaurin 级数展开，从而整个演化变成一个单位算符加上一项微扰：

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} U(t) = \mathbb{I} - \sum_k \lambda_k \hat{\Pi}_k t = \mathbb{I} - Ht.$$

此时， $U(t)$ 的作用导致量子态向哈密顿量减小的方向出现一个微小的演化。因此，小相互作用时间下的虚时演化可以用来作为么正演化的替代工具，重构一个量子系统演化的梯度。

接下来计算按照 Born 规则，将演化后的量子态向另一个目标态 $|\phi\rangle$ 上投影时的概率。它是：

$$\begin{aligned} \Pr [|\phi\rangle|\psi(t)\rangle] &= |\langle\phi|U(t)|\psi\rangle|^2 = |\langle\phi|\mathbb{I} - Ht|\psi\rangle|^2 = \Pr [|\phi\rangle|\psi(t=0)\rangle] - 2t\text{Re}\langle\psi|\phi\rangle\langle\phi|H|\psi\rangle, \\ \frac{d}{dt} \frac{\Pr [|\phi\rangle|\psi(t)\rangle]}{\Pr [|\phi\rangle|\psi(0)\rangle]} &= 2\text{Re}\langle H \rangle_w := 2\text{Re} \frac{\langle\phi|H|\psi\rangle}{\langle\phi|\psi\rangle}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

在公式 (3.9) 中，使用了 Aharonov et al. [111] 定义的弱值 (weak value) $\langle H \rangle_w := \frac{\langle\phi|H|\psi\rangle}{\langle\phi|\psi\rangle}$. 这个量表示量子态在从 ψ 演化到 ϕ 时，受到哈密顿量对应操作的扰动强

度。它将是观测前后选择型量子佯谬的核心数学工具。上面的计算表明，虚时演化下投影测量概率对演化时间的导数，正比于哈密顿量弱值的实部。笔者在此指出，Dressel et al. [112] 已经发现，么正演化下投影测量概率对演化时间的导数，正比于哈密顿量弱值的虚部，然而之前人们并不知道如何利用微扰法测量弱值的实部。因此，笔者和许小冶老师对于该结论的推导完善了 Dressel 等人的工作，使得微扰法能够完整地用于测量哈密顿量的弱值。在第6章中，我们使用这里介绍的微扰法实现了“量子柴郡猫”佯谬的实验观测。

除此之外，尽管光学系统不能增大概率幅，但是由于符合计数最后以一个正交完备基上的计数率对概率进行归一化，因此并不影响虚时演化对于未被衰减的本征态进行“相对”放大的功效，从而该方法能够用于等价地研究近年来非常受到关注的非厄米哈密顿量描述的系统，例如 \mathcal{PT} -对称演化中的物理学 [113-115]。

3.3 光量子态测量

现在介绍如何将光子中包含的量子信息重新提取为经典信息。如上一节所述，由于偏振量子比特可以方便地实现与其他量子比特的耦合，因此往往被作为一个实现其他自由度上量子信息测量的媒介。因此，我们从光子偏振模式的测量开始进行介绍。

3.3.1 偏振模式测量

偏振量子比特本身的测量几乎就是演化的逆过程。因为偏振分束棱镜可以区分出水平和竖直偏振的光子，所以 $|H\rangle, |V\rangle$ 是最后演化的目标。对于一个光子，如果希望向 $|\psi\rangle_{\text{pol}} = \tilde{U}|H\rangle$ 进行投影测量，我们就在偏振分束棱镜前面加上一个波片组，实现 \tilde{U}^{-1} ，这样最后光子将转化到 $|H\rangle$ 并从偏振分束棱镜透射。在后面我们使用光纤收集和单光子探测就可以实现光子计数，再使用计数率的归一化或量子态层析等手段即可求得测量概率或者重构先前的光子波函数。另外，由于测量时将光子演化到 $|H\rangle$ 和 $\exp(i\phi)|H\rangle$ 没有区别，因此对偏振的测量相比任意么正演化可以进一步简化，只需使用一个四分之一波片和一个半波片即完成任务：

$$\tilde{U}_{\text{arb}}^{-1} = \exp(i\phi) U_{\text{HWP}}(\theta_2) U_{\text{QWP}}(\theta_1).$$

在表 3.1 中，列出将几个常见测量基投影到 $|H\rangle$ 时所使用的波片光轴相对于水平方向的角度。

表 3.1 测量常见偏振态时使用的波片角度设置。上面 6 个态由上而下，分别是 $\sigma_z, \sigma_x, \sigma_y$ 本征值为 ± 1 的本征态。下面两个态是 Bloch 球赤道和子午线上的态，其中 ϑ, φ 表示球上极角和方位角。

待测态 $ \psi\rangle$	四分之一波片角度 $\theta_1/^\circ$	半波片角度 $\theta_2/^\circ$
$ H\rangle$	0	0
$ V\rangle$	0	45
$ D\rangle = (H\rangle + V\rangle)/\sqrt{2}$	45	22.5
$ A\rangle = (H\rangle - V\rangle)/\sqrt{2}$	45	-22.5
$ L\rangle = (H\rangle + i V\rangle)/\sqrt{2}$	0	-22.5
$ R\rangle = (H\rangle - i V\rangle)/\sqrt{2}$	0	22.5
$ \vartheta\rangle = [\cos(\vartheta/2) H\rangle + \sin(\vartheta/2) V\rangle]$	$\vartheta/2$	$\vartheta/4$
$ \varphi\rangle = [H\rangle + \exp(i\varphi) V\rangle]$	$22.5 - \varphi/4$	45

3.3.2 空间模式测量

对于编码在光子空间模式上的量子态，如果只需要分辨各个空间模式的强度，可以通过移动单模光纤耦合的方式，分别收集各个模式的光子；也可以使用增强型电荷耦合器件 (intensified charge-coupled device) 相机，直接探测各个空间模式上对应的光子数；此时使用光子对中的另一个光子进行预报，就可以在很大程度上减少噪声。李传锋、许金时研究组已经使用该技术实现了 Bohmian 轨迹导引 [116]、双缝实验中测量-扰动关系的研究 [117] 以及无后选择的奇异弱值观测 [118] 等多项成果，并进一步发展该技术实现各个空间模式之间相位的分辨，从而进行基于光子动量测量的波前传感 [119-120]。

如果需要实现各个空间模式之叠加态的测量，往往就需要使用光束偏移器将拉开的空间模式重新收集，并逐步转化为偏振测量。这里只讨论一个非常具有代表性的场景：一个路径量子比特 + 偏振量子比特的测量，它的示意图和实现方法如图 3.8 所示。对于高维路径态的测量原则上只需逐步转换即可。初始时刻，量子信息编码在偏振比特 $|\cdot\rangle_{\text{pol}}$ 和路径自由度的一个 2 维子空间 $\{|k-1\rangle_{\text{path}}, |k\rangle_{\text{path}}\}$ 中。具体的测量流程如下：

1. 先把偏振量子比特测量掉，然后使用光束偏移器把 $|k-1\rangle_{\text{path}}$ 中测量后应当保留的部分转移到 $|k\rangle_{\text{path}}$ 态上，需要丢弃的部分仍然在 $|k-1\rangle_{\text{path}}$ 态上； $|k\rangle_{\text{path}}$ 中测量后应当保留的部分仍然在 $|k\rangle_{\text{path}}$ 态上，需要丢弃的部分转移到 $|k+1\rangle_{\text{path}}$ 态上。
2. 因此， $|k-1\rangle_{\text{path}}$ 路径上的偏振测量应当将待测的基矢转到 $|V\rangle_{\text{pol}}$ ，这可以通过在表 3.1 中将每个半波片的角度增加 45° 来实现，而 $|k\rangle_{\text{path}}$ 路径上的偏振

测量应当将待测的基矢转到 $|H\rangle_{\text{pol}}$, 直接使用表 3.1 中给出的操作即可。

- 当完成了偏振的测量后, 先前的路径态 $|k\rangle_{\text{path}}$ 已经转化为了偏振态 $|H\rangle_{\text{pol}}$; 而 $|k-1\rangle_{\text{path}}$ 转化为偏振态 $|V\rangle_{\text{pol}}$, 最多相差一个相位。因此, 再次进行偏振测量即得到先前路径比特的信息。

3.3.3 时间模式分辨

由于在上一节中已经讨论过的时间和空间模式的对应关系, 原则上所有的时间模式的叠加态测量也都可以转化为偏振模式的测量, 除了使用的元件是延迟型的双折射晶体之外, 方法与空间模式是非常相似的。当我们感兴趣的是测量时间模式在计算基矢上的分布时, Hong, Ou 和 Mandel [121] 开发了一个非常具有代表性的技术, 现在常称为 Hong–Ou–Mandel 干涉。它的方法是将两个全同的光子在一个偏振不依赖的 50:50 光学分束器上干涉, 当两个光子时间上重合时, 它们会总是跑到同一边, 因此符合计数会有一个明显的下降。这种方法能够将 $\text{ps} = 10^{-12} \text{ s}$ 量级上的光子时间差异转化为 $100 \mu\text{m}$ 量级上的光程差异, 因此极大地方便了时间模式探测。

现在仍然使用二次量子化的数学语言来分析 Hong–Ou–Mandel 干涉。在不依赖偏振的情况下, 两个全同光子到达分束器时间完全相同时, 产生算符之间的转换关系为:

$$\begin{cases} a^\dagger \rightarrow (a^\dagger + ib^\dagger)/\sqrt{2}, \\ b^\dagger \rightarrow (ia^\dagger + b^\dagger)/\sqrt{2}. \end{cases} \quad (3.10)$$

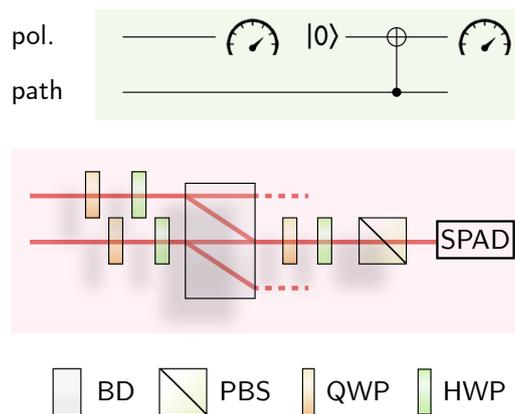


图 3.8 路径-偏振量子比特的联合测量。 上图为测量线路示意图。先完成偏振自由度的测量, 而后路径自由度的信息用 CNOT 操作转移到已经重新初始化的偏振自由度上, 最后再测量一次偏振自由度。下图为实验装置图。BD: 光束偏移器, PBS: 偏振分束棱镜, QWP: 四分之一波片, HWP: 半波片, SPAD: 单光子雪崩二极管。

在分束器之后，仍然选出 Alice 和 Bob 各接收到一个光子的情况。产生算符的演化是：

$$a^\dagger b^\dagger \rightarrow \frac{1}{2}(a^\dagger + ib^\dagger)(ia^\dagger + b^\dagger) = \frac{i}{2}(a^\dagger a^\dagger + b^\dagger b^\dagger).$$

这就解释了两个光子总是跑到一边的行为由于菲涅尔定律给出的反射时的附加相位，跑到另一边光子对应的波函数干涉相消了。通常，我们在实验中使用波长大约为 $\lambda = 800 \text{ nm}$ 的光子，并使用干涉滤光片使得光子的光谱宽度为 $\Delta\lambda = 3 \text{ nm}$ ，因此光子在传播方向上的展宽大约为 $\lambda^2/\Delta\lambda \approx 200 \text{ }\mu\text{m}$ 。当光子的两个时间窗口之间相差超过该值时，就可以使用 Hong–Ou–Mandel 干涉实现时间模式的区分。

3.3.4 轨道角动量模式探测

如前所述，轨道角动量原则上也可以通过转化为偏振模式进行探测。然而，另有一个技术可以大大简化该自由度上量子态的探测。利用了单模光纤只能接收轨道角动量为 $|0\rangle_{\text{OAM}}$ 光子的特点，可以通过使用空间光调制器，一次就将任意的目标量子比特投影到 $|0\rangle_{\text{OAM}}$ 。执行投影操作时，使用与制备操作相位之和为 2π 的相位图，来实现向该制备操作对应的量子态的投影测量 [122]。通过进行相差校正、补偿高阶轨道角动量收集效率等操作，可以进一步提高测量的精度。

到这里，笔者已经展示了线性光学实验的基本组成单元。在附录 A 中，笔者将给出用线性光学系统进行实验的一个案例，并在其中描述具有代表性的实验细节。而在正文的其他章节中，则将更加侧重实验与理论相结合。实际上，线性光学实验变化多端，每个工作要实现的目的都迥然不同，因此具体过程也会千变万化，不可能以偏概全地完全套用本章的方法。然而，本章内容中展示的“兵器库”可以在广泛的场合中取得应用，因此对线性光学实验基础的充分理解非常有利于把新的理论结果准确地转化成实验研究方案。从下一章开始，我转向具体地介绍如何使用线性光学实验来研究第 2 章中介绍的量子力学中的互文性，希望在四个实验中更加充分地展示线性光学用于量子力学基础研究的灵活性和威力。

第4章 互文性与非定域性关系的研究

下面从两项意在研究互文性和非定域性之间关联的工作开始，正式介绍线性光学平台上的量子互文研究。前面第2章已经介绍过，可以认为非定域性是互文性在类空间隔下的表现形式。然而类空间隔导致量子测量只能取算符直积的形式，因此在一定程度上限制了量子关联可取的形式和强度。

与此密切相关，研究互文性和非定域性之关系问题的一个动机^①在于：利用人类现有的知识，要判断一个特定的行为——也就是量子系统的测量概率分布——是否被 Bell 非定域性所允许，这一问题是不可求解的——即使使用 Navascués et al. [123] 提出的，目前已知的最好方法，仍然有一部分实际上不是量子性的行为不能被区分出来 [124]。相反，从定理 2.3 可知，判断一个特定的行为是否被量子互文性所允许是可以有效求解的——使用半正定规划等手段，求解给定图的 Lovász 数是一个多项式时间内可以完成的问题。因此，非定域性关联的集合不可求解的本质就在于类空间隔对于测量算符施加的限制。要展示这种区别，一个自然而然的方法就是从互斥图入手，寻找一些对应同一个互斥图的 Bell 非定域性和互文性的实验场景，并且刻画在这些场景下两种行为的差别。

本章介绍的两项工作都是描述非定域性和互文性行为的差别。这种差别体现出来的方式不外乎以下两种：

1. 对应于同一个互斥图所给出的非互文隐变量不等式，Bell 非定域性行为所能给出的最大违背小于互文性行为所允许的最大违背。我们称其为“超越非定域性的互文性”。
2. 对应于同一个互斥图所给出的非互文隐变量不等式，Bell 非定域性行为达到最大违背时所需的系统维度高于互文性行为所需的系统维度。我们称其为“互文浓缩”。

在第 4.3 节和第 4.4 节中，我们分别用理论结合实验的方法研究这两种差别的例子。我们的这两项工作展示了图论、线性代数和线性光学干涉仪等多种技术手段如何在量子力学基础的研究中得到紧密的结合，从而为进一步加深对量子力学中非经典行为的理解提供新的见解。

4.1 非定域性、互文性与互斥图

在理论部分，笔者通过一个改编的“薛定谔的猫”的故事引入了互文性的概念，在那里友人 A 看到的猫的颜色变化规律取决于观察进行的方式。然而在另

^①这个非常富有见解的想法完全来自 Adán Cabello, 我在这里只是简单地复述。

外的许多情况下,并不存在这种“非黑即白”的变化规律,而需要通过不等式的方法将非互文隐变量模型的预言转化成统计规律来反映出来。这个转化的方式由著名的 Fine [8] 定理给出:非互文隐变量理论(在类空间隔下表现为定域隐变量(LHV = local hidden variable)理论)允许实验中的所有变量包含一个预先给定的概率分布,即使这些变量是不对易的!因此,如果构造一些变量之间的概率组合,那么在非互文隐变量和定域隐变量理论中,就可以通过寻找变量之间的线性组合,再搜索各个变量的取值导致该线性组合极值的方法构造出一个不等式——对于非互文隐变量模型而言,这就等价于前面介绍过的非互文隐变量不等式;对于定域隐变量模型而言,这种组合就给出了一个 Bell 不等式。

让我们首先介绍一个可能是最著名的定域隐变量不等式: Clauser–Horne–Shimony–Holt (CHSH) 不等式 [125]。它被表示为下面期望值组合的形式:

$$\text{CHSH} := \langle a_0 b_0 \rangle_\psi + \langle a_0 b_1 \rangle_\psi + \langle a_1 b_0 \rangle_\psi - \langle a_1 b_1 \rangle_\psi \stackrel{\text{LHV}}{\leq} 2.$$

其中, $a_\kappa, b_\kappa = \pm 1$ 是两个处在类空间隔下的观察者可以测量的物理量,在 CHSH 的设置中, $\kappa \in \{0, 1\}$ 可以取两个值。因此,我们说 CHSH 不等式是一个两观察者、两测量设置、两输出结果的 Bell 不等式,因此在量子信息学的研究中,它又常被记为 (2,2,2)-Bell 不等式。它在定域隐变量理论中的上限 2,可以由遍历 a_κ, b_κ 的 16 种可能的组合得到。

在量子力学中,CHSH 不等式可以被违背。我们取 $|\psi\rangle = |\Phi^+\rangle$, 四个测量算符分别为 Pauli 算符和它们的线性组合:

$$a_0 = \sigma_z, \quad a_1 = \sigma_x, \quad b_0 = (\sigma_z + \sigma_x)/\sqrt{2}, \quad b_1 = (\sigma_x - \sigma_z)/\sqrt{2}. \quad (4.1)$$

此时将得到 $\text{CHSH} = 2\sqrt{2}$, 违反了定域隐变量理论的预言。我们定义量子-经典比为量子力学允许的最大值和不等式右边的比值,那么 CHSH 不等式的量子-经典比高达 $\sqrt{2}$, 因而非常适合用于实验观测。时至今日,在线性光学实验中,它的违背程度都是用于判断纠缠光源质量的“金标准”之一。

我们现在从互斥图的角度考虑 CHSH 不等式。互斥图使用的测量都是投影测量,因此需要先将 CHSH 不等式转化为基本事件概率组合的形式:注意到二值算符和投影算符的对应关系 $\hat{\Pi}_\kappa^\pm = (\mathbb{I}_2 \pm \sigma_\kappa)/2$, $\kappa \in \{x, y, z\}$, 有:

$$\begin{aligned} \text{CHSH}^{\text{CSW}} := & \Pr(a_0 = +1, b_0 = +1) + \Pr(a_0 = -1, b_1 = -1) \\ & + \Pr(a_1 = -1, b_1 = +1) + \Pr(a_1 = +1, b_0 = +1) \\ & + \Pr(a_0 = -1, b_0 = -1) + \Pr(a_0 = +1, b_1 = +1) \\ & + \Pr(a_1 = +1, b_1 = -1) + \Pr(a_1 = -1, b_0 = -1) \stackrel{\text{LHV}}{\leq} 3. \end{aligned} \quad (4.2)$$

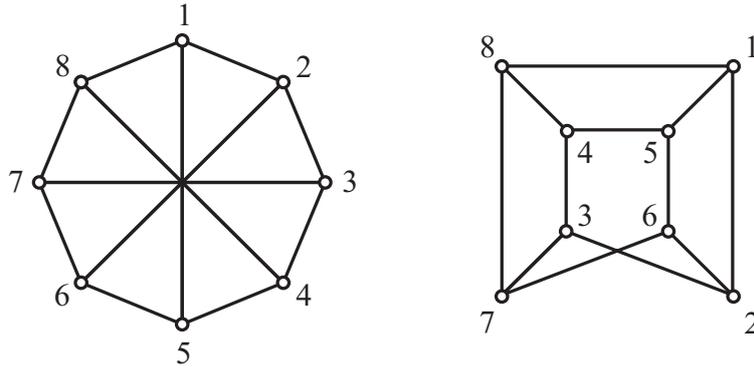


图 4.1 CHSH 实验中一个事件子集的互斥图。左右两图给出两种等价的表示方法。其中，八个顶点依次对应公式 (4.2) 中的 8 个测量事件。

这里只需要使用使得在原始的 CHSH 不等式中，贡献为正的事件组合。仍然使用上面的量子态和测量，将得到非定域性关联允许的 CHSH^{CSW} 最大值为 $2 + \sqrt{2}$ 。容易发现，相邻两项中的事件组合中间有矛盾的观察结果，在单次实验中是决不可能同时发生的；同样相隔 3 项（距离最远）的四对组合也不能同时出现。因此，可以画出 CHSH 实验中这 8 个事件的互斥图。如图 4.1 所示，顶点 1–8 依次对应 CHSH^{CSW} 中的 8 项，这个互斥图就是图论中已经定义的 Wagner 图。有趣的是，这个图也等价于一个 Möbius 梯子 M_8 。从图论中可知，

$$\vartheta(M_8) = 2 + \sqrt{2}.$$

因此，根据定理 2.3 可知，如果根本不考虑类空间隔，只要求用 8 个测量来还原图 4.1 中的互斥关系，那么互文性能够给出的 CHSH^{CSW} 最大值也只有 $2 + \sqrt{2}$ ，与非定域性是一样的。在 CHSH 实验中，不存在超越非定域性关联的互文性。

4.1.1 一个例子：互斥图 C_5 对应的量子关联

下面介绍一个非常有代表性的超越非定域性的互文性的案例。考虑使得 $\vartheta > \alpha$ 的最简单的图：五边形图 C_5 。它被表示在图 4.2 中。对应于这个图的非互文隐变量不等式就是前面介绍过的 KCBS 不等式转化而来的概率形式：

$$\text{KCBS}^{\text{QC}} := \sum_{k=0}^4 \Pr(A|k) = \sum_{k=0}^4 \Pr(A_k) \stackrel{\text{NCHV}}{\leq} 2. \quad (4.3)$$

我们这里使用的另一种记法， $\Pr(A|k)$ ， $A \in \{0, 1\}$ ， $k \in \{0, \dots, 4\}$ 表示当测量算符选择为 k 时，测量结果为 A 的概率。另外，有 $\vartheta(C_5) = \sqrt{5}$ 。接下来，再考虑从非定域性的角度实现图 4.2 中的互斥图。这个时候两个观察者每人至少选择两个投影测量算符，我们使用 $\Pr(ab|xy)$ 表示两个观察者 Alice 和 Bob 的测量算符选择分

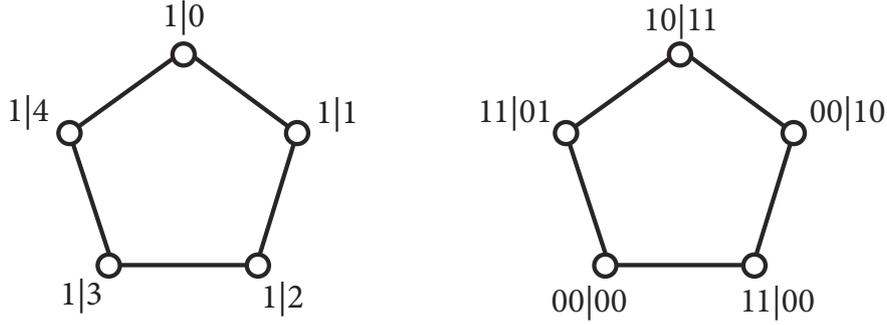


图 4.2 KCBS 实验中一个事件子集的互斥图。左图为使用单体的互文性关联进行实验时需要记录的事件，右图为使用两体的非定域性关联进行实验时需要记录的事件。右图取自参考文献 [75]。

别为 x, y 时，测量结果为 a 和 b 的概率。Sadiq et al. [75] 在这个场景下，发现一个新的 Bell 不等式：

$$\text{KCBS}^{\text{NL}} := \Pr(00|00) + \Pr(11|01) + \Pr(10|11) + \Pr(00|10) + \Pr(11|00) \stackrel{\text{LHV}}{\leq} 2.$$

量子力学允许的最大值是 $\text{KCBS}^{\text{NL}} \stackrel{\text{Q}}{\leq} (16 + \sqrt{13})/9$ 。^① 因此，量子互文性 (QC = quantum contextuality) 与非定域性 (NL = nonlocality) 给出的关联有一定的差异： $\Delta_{\text{NL}}^{\text{QC}}(\text{KCBS}) := \max \text{KCBS}^{\text{QC}} - \max \text{KCBS}^{\text{NL}} \approx 5.77 \times 10^{-2}$ ，也就是对应于互斥图 C_5 的量子关联体现出超越非定域性的互文性。另外，由于 $\text{KCBS}^{\text{QC}} = \sqrt{5}$ 在三维希尔伯特空间中即可实现，而任何非定域性对应的希尔伯特空间维数至少为 4，因此互斥图 C_5 中的量子关联也出现互文浓缩的现象。总的来说，该场景是一个研究互文性与非定域性关系的非常好的入手案例。我们也可以用类似的方法，研究其他具有代表性的互斥图，例如 Hardy [77] 的著名的非定域性佯谬。Mermin [126] 已经分析过该场景转化为互文性实验后的不等式违背情况，其中也出现超越非定域性的互文性 $\Delta_{\text{NL}}^{\text{QC}}(\text{Hardy}) \approx 2.90 \times 10^{-2}$ 。但是，此时不存在互文浓缩现象。

4.2 用测量-重新制备方法研究互文性

上面举出了两个例子来介绍互文超越非定域和互文浓缩现象。可以看出，该方向的研究将非常依赖互斥图的语言来检测 CSW 类型的非互文隐变量不等式。我们的出发点是一个互斥图，以及其对应的实验上可验证的不等式，也就是公式 (2.14)。利用上一节中条件概率的记法，该公式可以更简练地写为：

$$\sum_{k \in V(G)} \Pr(1|k) - \sum_{(i,j) \in E(G)} \Pr(1, 1|i, j) \stackrel{\text{NCHV}}{\leq} \alpha(G). \quad (4.4)$$

^①我和 Sadiq et al. [75] 都不能给出测量方向和量子态的解析结果。但是我的数值结果在 13 位有效数字下与该量子力学最大违背值的解析结果符合。

然而，这个不等式在实验上的使用仍然存在一些困难。具体来说：

1. 公式 (4.4) 要求实验者拥有进行两次连续测量的能力。需要将第一次测量之后得到的量子态用于第二次测量，从而弥补两个互斥的算符之间不完美的正交性。因此，正规的互文实验从发展起来至今都非常依赖接续测量 [127]，而这会导致所需的测量装置数极高 [26]，并要求引入额外的自由度之间的耦合，进而制约实验的精度。
2. 公式 (4.4) 能够使用一个两次测量联合概率的形式来弥补不完美的正交性的前提是：每个测量基的选择对于另一个测量的结果没有影响。类似于 Bell 非定域性场景中的无信号条件，这个要求常被称为接续测量中的无扰动条件 (no-disturbance)。具体来说，测量基选择对于另一个测量的结果的影响可以用绝对因果效应表述为下述的信号传递因子：

$$\begin{cases} \varepsilon_{xy} & := \left| \sum_a \Pr(a, b|x, y) - \Pr(b|y) \right|, \\ \varepsilon'_{xy} & := \left| \sum_b \Pr(a, b|x, y) - \Pr(a|x) \right|. \end{cases} \quad (4.5)$$

原则上，互文实验需要保证每对互斥的测量 (i, j) 都满足 $\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} = 0$ 。但是，受限于实验的精度，即使在类空间隔下进行的 Bell 非定域实验，该值也可以显著地不为 0。因此，实验上必须要显式地检验公式 (4.5)，从而确保在无扰动的条件下测试公式 (4.4)。

相比于早期的互文实验，两次测量方案已经在一定程度上降低了要求；否则，对于无信号条件的测试将更为严苛和难以分析。然而，即使使用两次测量方案，仍然不能从根本上解决避免对于接续测量的依赖。尤其在系统维度高的情况下，任何一个接续测量带来的资源消耗都是非常显著的。幸运的是，Cabello [45] 证明，只要接受 Lüders 规则定义的测量后的量子态更新法则，就可以使用测量-重新制备实验完全替代接续测量实验。这个方法的原理如图 4.3 所示。它除了测量公式 (4.4) 中右边第二项的方法与标准的接续测量不同，其它都完全按照 CSW 框架进行。

具体来说，此时先使用投影测量取得第一个测量的结果和概率；而后按照 Lüders 规则重新制备第一个测量后生成的量子态，再将其输入第二个投影测量，从而再现出 CSW 框架下互文实验的结果。如果使用下标 \Pr_ψ 标记输入态为 $|\psi\rangle$ 时测量的概率，那么就可以将该方法下要分析的不等式表示为：

$$\sum_{k \in V(G)} \Pr_\psi(1|k) - \sum_{(i,j) \in E(G)} \Pr_\psi(1|i) \Pr_i(1|j) \stackrel{\text{NCHV+LR}}{\leq} \alpha(G). \quad (4.6)$$

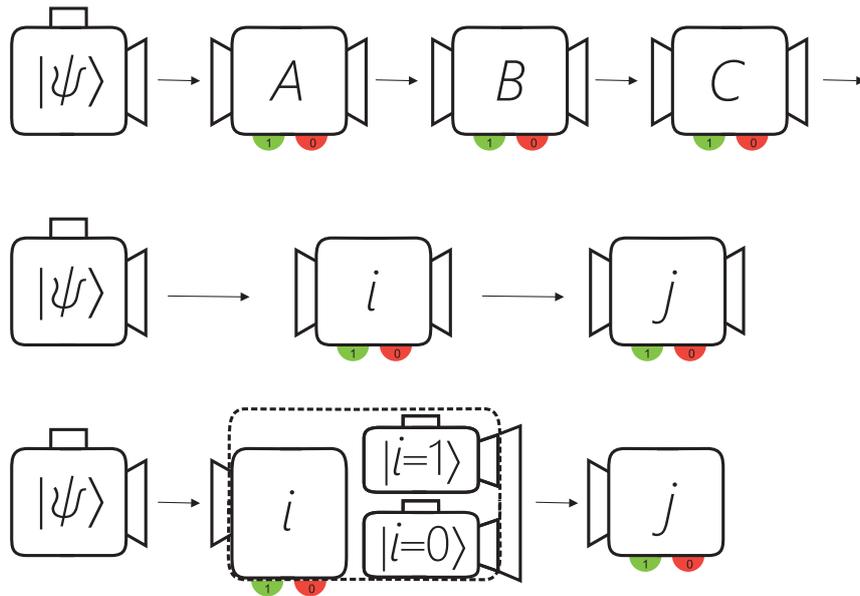


图 4.3 量子互文性实验的化简。上图：原始的互文实验需要用一系列接续测量作用在同一个量子态上。中图：在 CSW 框架下，所有的互文实验都可以被表示为最多一次接续测量的形式；接续测量的两个算符一定是正交的。下图：如果额外地接受 Lüders 规则作为态更新的原理，就可以完全避免接续测量，使用投影测量先取得第一个测量的结果和概率；而后按照 Lüders 规则重新制备第一个测量后生成的量子态，再将其输入第二个投影测量，从而再现出 CSW 框架下互文实验的结果。

其中，额外的约束条件 $LR = \text{Lüders rule}$ ，表示这种测试方法必须要在接受 Lüders 规则的基础上进行。因此，这种简化的方法在概念上当然伴随着一定的代价：它接受了量子力学的一部分公设作为先决条件，来测试量子互文性。然而，该方法的意义在于极大地拓宽了能够测试的非互文理论的范围。例如当我们测试系统的维数增加到 $d \sim 10$ 的数量级时，目前没有连续测量方法能够高精度地实现任意的测量，而使用光场调控和路径模式的投影测量则是已经较为成熟的技术，例如 Xiao et al. [128] 使用这种方法研究了正多面体骨架互斥图对应的态无关的互文性。在第 4.4 节中，我们使用这种方法在一个路径编码的 7 维量子系统中，观测到互文浓缩的现象。

4.3 超越非定域性的互文性

从实验上观察互文超越非定域现象具有一定的难度，其原因在于在已知的案例中互文性与非定域性行为强度的差异 $\Delta_{\text{NL}}^{\text{QC}}$ 都极小，在 $O(10^{-2})$ 的数量级上，因此将制约对于互文超越非定域现象观测的可靠性。因此，也甚少有实验工作直接比较这两种关联强度的差异。下面介绍我们对于该问题的研究。这项工作的基

础是陈景灵老师课题组对于广义的 Bell 不等式对应的互斥图所进行的研究。

前面 CHSH 实验考虑了一个 (2,2,2)-Bell 不等式。实际上, Bell 不等式可以扩展到更为广泛的场景下。下面给出一个使用概率形式表示的两观察者、三测量设置、两输出结果的 Bell 不等式,也就是一个 (2,3,2)-Bell 不等式,这里 Alice 和 Bob 都能进行三种不同的测量,每种测量可以得到两个不同的结果;因此习惯上该不等式可以使用长下标记为 I_{3322} 不等式。我们这里使用的是该不等式的一个 CSW 形式的变体:

$$\begin{aligned}
 I_{3322}^{\text{NL}} = & \Pr(0, 0|0, 1) + \Pr(0, 0|0, 2) + \Pr(0, 0|1, 0) + \Pr(0, 0|1, 2) \\
 & + \Pr(0, 0|2, 0) + \Pr(0, 0|2, 1) + \Pr(0, 1|1, 1) + \Pr(1, 0|1, 1) \\
 & + \Pr(1, 1|1, 1) + \Pr(0, 1|2, 2) + \Pr(1, 0|2, 2) + \Pr(1, 1|2, 2) \\
 & + \Pr(1, _ |0, _) + \Pr(1, _ |1, _) + \Pr(_, 1 | _, 0) + \Pr(_, 1 | _, 1) \stackrel{\text{LHV}}{\leq} 6. \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

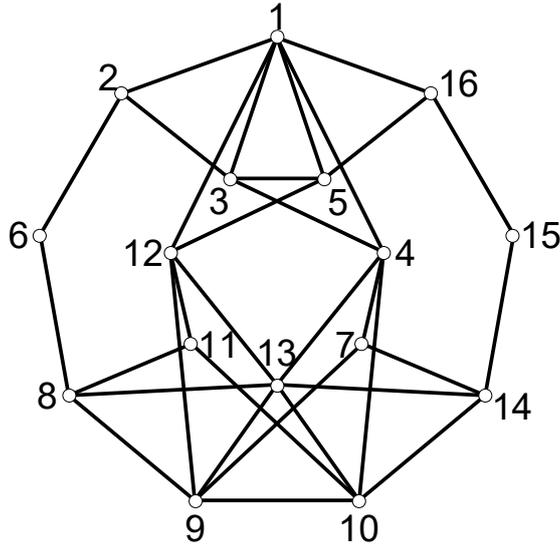


图 4.4 I_{3322} 不等式对应的互斥图 $G_{I_{3322}}$. 对于非定域性实验, 16 个顶点对应的事件分别是: **1**: 1, 1|2, 2, **2**: 0, 0|2, 0, **3**: 1, 0|2, 2, **4**: 0, 0|2, 1, **5**: 0, 1|2, 2, **6**: $_, 1 | _, 0$, **7**: $_, 1 | _, 1$, **8**: 0, 0|1, 0, **9**: 1, 0|1, 1, **10**: 0, 1|1, 1, **11**: 1, $_ | 1, _$, **12**: 0, 0|1, 2, **13**: 1, 1|1, 1, **14**: 0, 0|0, 1, **15**: 1, $_ | 0, _$, **16**: 0, 0|0, 2. 对于互文性实验, 只要 16 个投影测量满足互斥图要求的对易性即可。

使用 I_{3322} 不等式中的测量事件, 可以得到如图 4.4 所示的 16 个测量对应的互斥图 $G_{I_{3322}}$, 再按照定理 2.3 可以从互斥图立即得到一个非互文不等式:

$$I_{3322}^{\text{QC}} = \sum_{k \in V(G_{I_{3322}})} \Pr(1|k) - \sum_{(i,j) \in E(G_{I_{3322}})} \Pr(1, 1|i, j) \stackrel{\text{NCHV}}{\leq} \alpha(G_{I_{3322}}) = 6. \quad (4.8)$$

非互文不等式的上界也是 6, 这不是偶然的, 而是 Bell 非定域性作为互文性特例的必然结果: 每一个 Bell 不等式的每项系数均为 1 的 CSW 形式, 其定域模型的上界就是互斥图的独立数。 $G_{I_{3322}}$ 的有趣之处在于它包含一个非常强的互文超越

非定域现象：首先，使用半正定规划仍然可以平凡地求出 $\vartheta(G_{I_{3322}}) \approx 6.588$ ，并且需要使用一个 5 维的量子系统；另外使用 4 维的量子系统即可取得 $I_{3322}^{QC} \stackrel{Q}{\approx} 6.571$ 。其次， I_{3322}^{NL} 的最大违背是量子力学基础中的一个未解之谜。Pál et al. [129] 计算出 $I_{3322}^{NL} \stackrel{Q}{<} 6.251$ ，并且需要使用一个无穷维的系统来实现该最大值。对于量子比特系统而言，可以得到的最大值是 $I_{3322}^{NL} \stackrel{Q}{=} 25/4$ ，和互文性场景的结果相比，知 $\Delta_{NL}^{QC}(I_{3322}) \approx 0.337$ ，给出一个非常显著的互文超越非定域性的案例。

4.3.1 实验实现

由于 $G_{I_{3322}}$ 提供了较迄今为止其它所有已知的互斥图高出近一个数量级的互文性-非定域性行为强度差异，因此该场景适合被用于从实验上展示超越非定域性的互文性。基于公式 (4.7) 和公式 (4.8)，我们分别使用偏振纠缠编码的两量子比特系统和轨道角动量编码的单体 4 维量子系统，测试非定域性行为 and 互文性行为所能导致的最大量子关联。在本节中，分别介绍这两个实验。

先介绍互文性实验。总的来说，这里需要实现一个 4 维光子系统在一系列基矢下的制备-测量。实验装置如图 4.5 所示。光子通过单模光纤进入实验装置。通过在空间光调制器上加上全息相位图，可以将任意的波前相位加载在光子上。我们选取四个计算基矢分别为轨道角动量的本征态： $|i_0\rangle \leftrightarrow |l=3\rangle$ ， $|i_1\rangle \leftrightarrow |l=1\rangle$ ， $|i_2\rangle \leftrightarrow |l=-1\rangle$ ， $|i_3\rangle \leftrightarrow |l=-3\rangle$ 。这可以通过将光子的波函数调制为对应阶数的 Laguerre-Gaussian 模式 LG_p^l ， $p=0$ 来实现。制备初态的空间光调制器被放置在一个 $4f$ -系统的输入平面上，在其输出平面上放置第二个用于测量的空间光调制器，并在焦平面上插入了一个光阑，从而过滤掉不需要的零阶和高阶衍射模式项，仅保留对应于目标态的第一阶衍射模式 [103]。第二个空间光调制器的功能是将待测的轨道角动量态转换回 Gaussian 模式 $|l=0\rangle$ ，随后由单模光纤将这个模式选出：在第 3 章中已经介绍过，携带非零轨道角动量的光子不能被聚焦到一个点，因此它们被单模光纤滤掉。此外，在第二个空间光调制器和单模光纤之间插入了两个透镜组成望远镜，以调整光束尺寸并优化光纤耦合效率。最后，光子被接入到单光子雪崩探测器。在每个制备-测量设置下，计数率与测量概率成正比： $\Pr_{\psi}(1|\phi) = |\langle \phi|\psi\rangle|^2$ 。

利用图 4.5 中的装置，我们按照公式 (4.4) 来测量其中的每一项结果。对于第一项来说，要测量的是一个初态在一些投影算符基矢下的测量概率。对于第二项来说，要额外再测量的是各个投影算符的 +1 本征态在所有与其互斥的投影算符基矢下的测量概率。将它们再与初始态在原先投影算符上测量的概率组合相乘，就可以还原出公式 (4.4) 中的每一项结果。实验结果如图 4.6 所示，测量概率与理论预期符合的非常好，而且互斥算符之间也有良好的正交性。将测量结果代

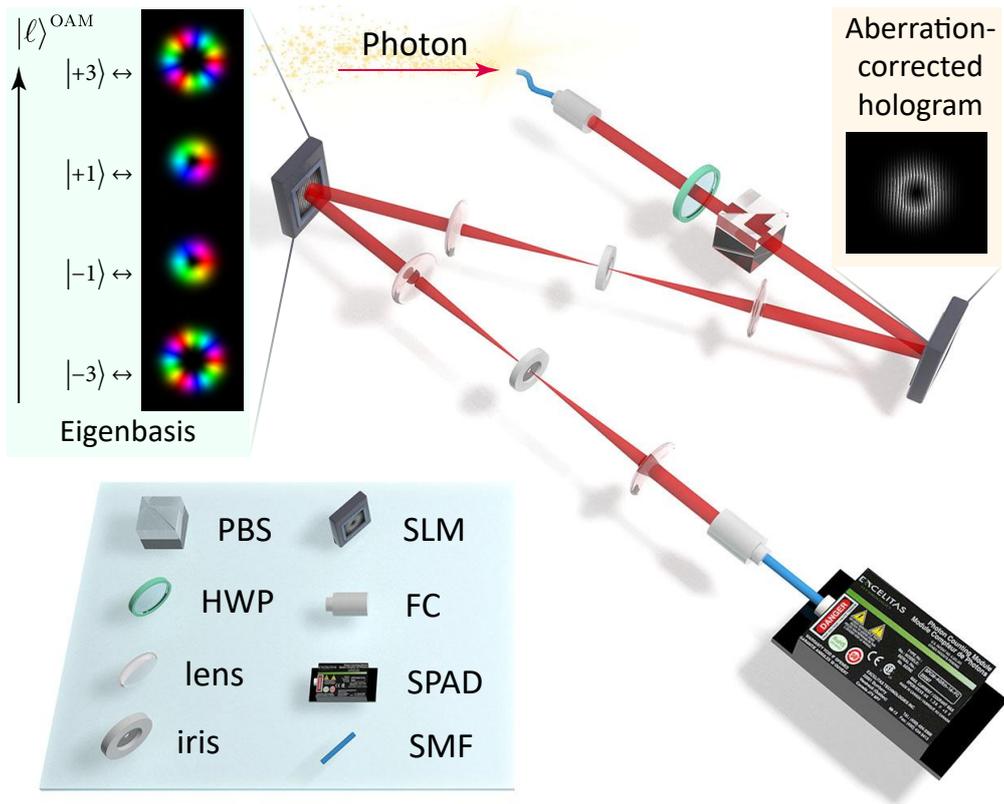


图 4.5 互文超越非定域实验装置。使用光子的轨道角动量模式编码 4 维量子态，使用空间光调制器实现轨道角动量模式制备，再结合单模光纤实现精确的测量。最后，用单光子雪崩探测器进行单光子计数，计算公式 (4.4) 中所需的各个测量概率。PBS: 偏振分束棱镜，HWP: 半波片，lens: 透镜，iris: 光阑，SLM: 空间光调制器，FC: 光纤耦合器，SPAD: 单光子雪崩探测器，SMF: 单模光纤。

入公式 (4.4)，得到：

$$I_{3322}^{\text{QC}} = 6.488 \pm 0.025. \quad (4.9)$$

其中，误差棒对应于从泊松计数统计估计的 1σ 标准偏差。这个结果以超出 19 个标准偏差的精度违背非互文隐变量不等式 (4.8)，从而观测到量子系统的互文性。需要注意的是，由于实验中使用的单光子探测器的效率 ($\eta \approx 60\%$) 以及光子在空间光调制器上的衍射效率 ($\eta \approx 30\%$)，使得最终只有较少部分的光子造成了探测器的响应，因此，上述互文性的观测结果需要建立在公平抽样假设的基础上，也就是假设这些到达的光子忠实地反映了所有应被探测的光子的行为。

接下来，我们来量化互文性实验中接续测量之间的扰动。在这个实验中，我们把公式 (4.5) 中测量结果为 0 和 1 的两种情况分开表示为四个信号传递因子

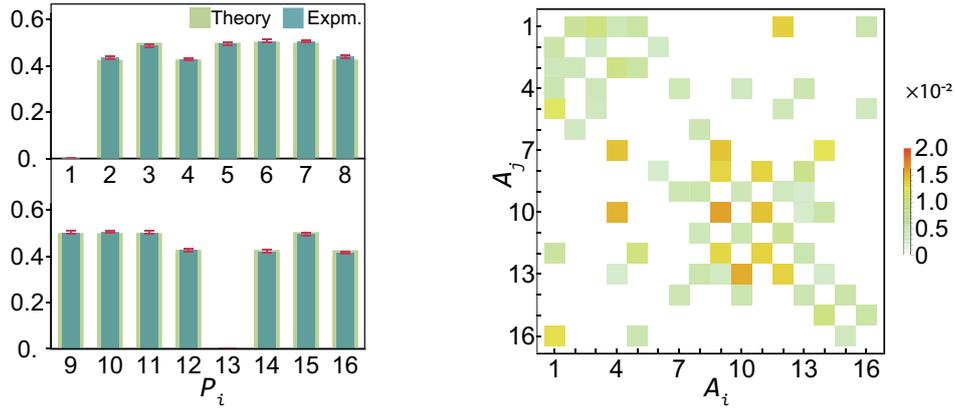


图 4.6 互文超越非定域实验数据：互文部分。左图：16 个符合图 4.4 中互斥关系的投影算符对应的测量概率。右图：对应原则上应当互斥的投影算符 $\hat{\Pi}_i, \hat{\Pi}_j$ 本征态之间的测量概率 $\Pr_i(1|j)$ 。当且仅当 $(i, j) \in E(G_{13322})$ 时，对应的概率才被测量。

$\varepsilon(_, 0|_, v_j), \varepsilon(0, _|_, v_i, _) = 0, \varepsilon(_, 1|_, v_j), \varepsilon(1, _|_, v_i, _)$ 。它们分别定义为：

$$\begin{cases} \varepsilon(_, 0|_, v_j) &= |\Pr_{\psi}(_0|_) - \Pr_{\psi}(00|ij) - \Pr_{\psi}(10|ij)|, \\ \varepsilon(_, 1|_, v_j) &= |\Pr_{\psi}(_1|_) - \Pr_{\psi}(01|ij) - \Pr_{\psi}(11|ij)|, \\ \varepsilon(0, _|_, v_i, _) &= |\Pr_{\psi}(i_|0_) - \Pr_{\psi}(00|ij) - \Pr_{\psi}(01|ij)|, \\ \varepsilon(1, _|_, v_i, _) &= |\Pr_{\psi}(1_|_) - \Pr_{\psi}(10|ij) - \Pr_{\psi}(11|ij)|. \end{cases} \quad (4.10)$$

其中，下划线都代表边际概率。这些公式中等号右边的量又可以全部使用实验中可观测的概率来表示为：

$$\begin{cases} \Pr_{\psi}(0|i) &= 1 - \Pr_{\psi}(1|i), \\ \Pr_{\psi}(11|ij) &= \Pr_{\psi}(1|i)\Pr_i(1|j), \\ \Pr_{\psi}(01|ij) &= \Pr_{\psi}(0|i)\Pr_{i^{\perp}}(1|j), \\ \Pr_{\psi}(10|ij) &= \Pr_{\psi}(1|i) - \Pr_{\psi}(11|ij), \\ \Pr_{\psi}(00|ij) &= \Pr_{\psi}(0|i) - \Pr_{\psi}(01|ij). \end{cases} \quad (4.11)$$

需要特别指出的就是上式第三行中出现 $\Pr_{i^{\perp}}(1|j)$ ，其含义是当对于 i 的测量给出 0 后，剩余的态在 j 上的投影概率，这就是笔者前面提到需要使用 Lüders 规则来重新制备量子态的地方。它的制备也是使用空间光调制器完成：按照第一步的测量概率，直接在空间光调制器的屏幕上显示一个全息图，来制备：

$$|i^{\perp}\rangle = \frac{|\psi\rangle - \langle i|\psi\rangle|i\rangle}{\| |\psi\rangle - \langle i|\psi\rangle|i\rangle \|} = \frac{|\psi\rangle - \langle i|\psi\rangle|i\rangle}{\sqrt{1 - |\langle i|\psi\rangle|^2}}. \quad (4.12)$$

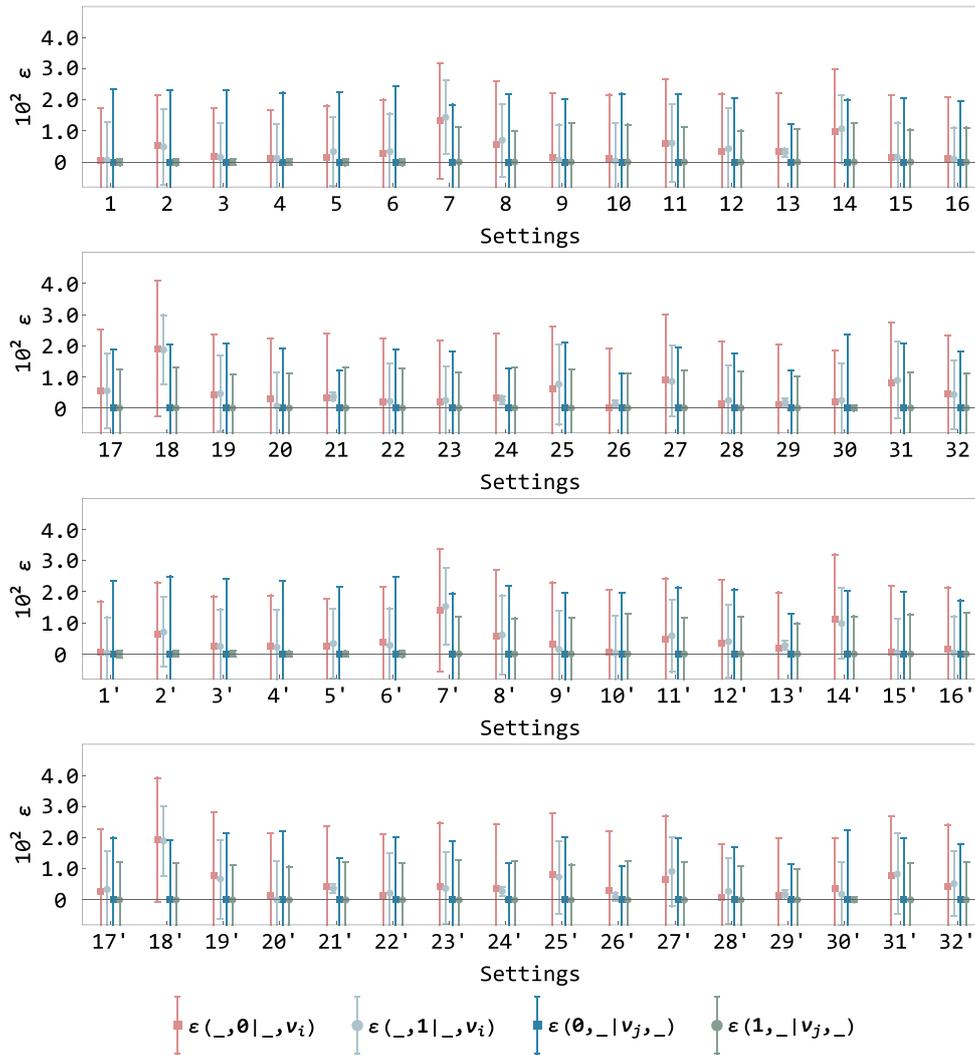


图 4.7 互文超越非定域实验数据：无扰动条件。纵轴表示按照公式 (4.5) 计算得来的信号传递因子，按照测量结果为 0 和 1 分开分析。注意向时间过去传递的两种信号传递因子自动得到 0。横轴对应图 4.4 中的 32 条边，按顶点编号由小到大依次排列，其中不带'和带'的参数分别对应正向 ($i < j$) 和反向 ($i > j$) 的信号传递因子。

这样，就可以将所有所需的概率使用制备-测量实验来求出来。计算结果表明， $|\epsilon| = (0.22 \pm 1.44) \times 10^{-2}$ 。由于实验的不完美性，对于少数数据点，加上 1σ 误差棒也不符合 $\epsilon = 0$ 。但是如果稍微放松统计性的要求，只从数据的平均来看，则很好地符合无扰动条件，不导致显著的测量间扰动效应。因此，可以认为公式 (4.4) 所需的条件成立，对于非互文隐变量理论的违背是有效的。进一步地，不理想的无扰动条件所造成的影响还可以使用因果模型理论归结到观测的不等式结果中 [130]。这个问题超出了本工作的范围，将是今后无漏洞互文实验中一个有趣的研究方向。

最后，我们观测公式 (4.7) 的实验结果，从而通过两个实验中结果的对比，直

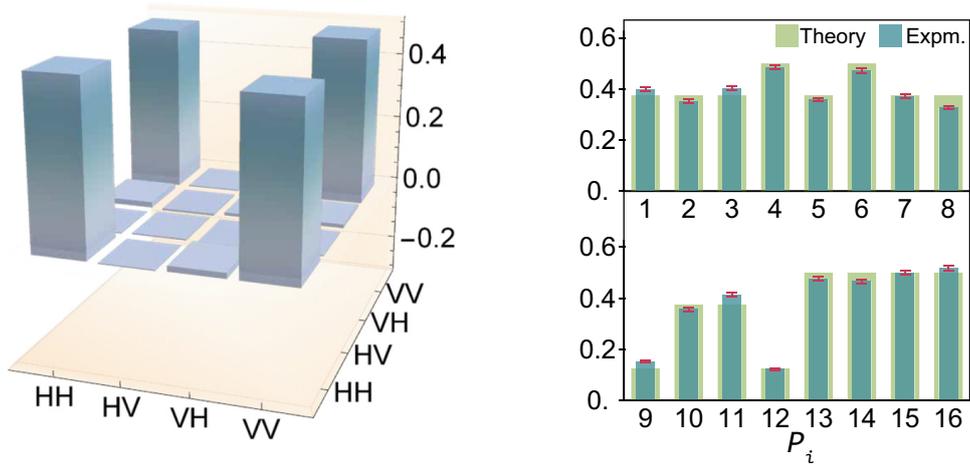


图 4.8 互文超越非定域实验数据：非定域部分。左图：纠缠源量子态层析结果的实部。右图：图 4.4 中定义的两体测量算符对应的概率以及与理论结果的对比。

接展示互文超越非定域现象。此时使用的装置就和图 3.3 中相同，在其中一路加上半波片后，生成一个两光子最大纠缠态 $|\Phi^+\rangle$ 。我们通过量子态层析分析该光源的质量，结果如图 4.8 所示。纠缠源与目标态的保真度达到 97.5%。其中，两个量子态的保真度定义为 [36]：

$$F(\hat{\rho}, \hat{\rho}') := \text{Tr} \left[\left| \sqrt{\hat{\rho}} \sqrt{\hat{\rho}'} \right| \right]^2.$$

通过测量图 4.4 中的两体测量算符对应的概率，我们计算出：

$$I_{3322}^{\text{NC}} = 6.165 \pm 0.012. \quad (4.13)$$

这个结果稍稍低于 I_{3322}^{NC} 在量子力学下可能达到的上限，这是因为输入纠缠态与目标态的保真度有限，以及测量装置的不完美性所导致的。不过，仍然足以体现出强烈的量子非定域性，违背定域隐变量不等式超过 13 个标准偏差。将公式 (4.9) 和公式 (4.13) 给出的结果比较，得到：

$$\Delta_{\text{NL}}^{\text{QC}}(I_{3322}) \approx 0.323 \pm 0.037, \quad (4.14)$$

因此，我们已经以超过 8.7 个标准偏差的实验精度，在互斥图 $G_{I_{3322}}$ 的基础上观测到超越非定域性的量子互文性。研究结果表明图论与量子关联之间存在根深蒂固的联系，并将进一步加深对不同类型量子关联的理解。

4.4 在低维系统中实现已知最强的量子关联

现在转向介绍对于互文浓缩现象的理论和实验研究。相比于互文超越非定域现象，互文浓缩是一个更新的结果，在 KCBS 实验之外很少有案例被发现。2021

年以来，对于图论和量子关联的研究进展使得该方向的研究逐渐开始受到关注，其中 Ray et al. [131] 发现一个适用于 3 量子比特 GHZ 态的 Bell 不等式（常用发现者的名字称为 Mermin [132] 不等式）的最大违背，可以在互斥图的意义，用一个 $2^3 - 1 = 7$ 维单体不可分系统中被等价地实现。我们在这一节中说明，Ray 等人发现的例子在任意粒子数的 Mermin 不等式中普遍存在： n 体 Mermin 不等式总是可以使用 CSW 框架转化为一个非互文隐变量不等式，且在 $2^n - 1$ 维系统中即可达到最大违背。我们同时使用路径编码的光学系统，借助上一节中发展的光场调控手段搭建干涉仪，直接观测到 $d = 7$ 时的互文浓缩现象。

4.4.1 Mermin 不等式：指数增长的量子-经典比

前面已经介绍了使用熔接门实现四光子 GHZ 态，现在我们正式地定义更普遍意义上的 GHZ 态。一个 n -粒子 GHZ 态的形式是：

$$|\text{GHZ}_n\rangle = (|\underbrace{00\dots 0}_n\rangle + |\underbrace{11\dots 1}_n\rangle)/\sqrt{2},$$

它是两种截然相反的量子态的叠加，当 n 很大时，描述的就是类似于“薛定谔的猫”的宏观物体两种状态的相干叠加。GHZ 态具有强烈的非经典特性，例如其中所有 n 个量子比特都彼此纠缠。这种非经典特性在 Mermin 不等式中非常好地体现出来。该不等式是一个 $(n,2,2)$ -Bell 不等式，在 n 为奇数时的形式为^①：

$$M_n = \frac{1}{2i} \sum_{v \in \{\pm 1\}} v \bigotimes_{j=1}^n (\sigma_x^{(j)} + iv\sigma_y^{(j)}) \stackrel{\text{LHV}}{\leq} 2^{\frac{n-1}{2}}. \quad (4.15)$$

在量子力学中，允许达到的上限是 $M_n \stackrel{\text{Q}}{=} 2^{n-1}$ ，这个上限就是使用 GHZ 态达到的。可以看出，在这个案例中，量子关联与定域隐变量所允许的最大强度之比随着粒子数指数增加！

下面使用 CSW 框架将 Mermin 不等式转换为非互文隐变量不等式。和研究 CHSH 实验时的操作一样，我们只保留公式 (4.15) 中对于不等式左边贡献为正的投影测量，贡献为负的用贡献为正的表示出来，再额外加上对应总概率之和的常数，得到的概率和形式记为 $\mu_n = M_n/2 + 2^{n-2}$ ，其对应的互斥图记为 G_{Mn} 。作为例子，笔者在图 4.9 给出对应于 $n = 3$ 时互斥图 G_{M3} 的形式。根据 Cabello et al. [21] 的计算：

$$\alpha(G_{Mn}) = 2^{n-2} + 2^{\frac{n-3}{2}}, \quad \vartheta(G_{Mn}) = 2^{n-1}. \quad (4.16)$$

代入定理 2.3，有：

$$\mu_n \stackrel{\text{NCHV}}{\leq} \alpha(G_{Mn}) = 2^{\frac{n-3}{2}} + 2^{n-2} \stackrel{\text{Q}}{\leq} \vartheta(G_{Mn}) = 2^{n-1}. \quad (4.17)$$

^①我们不考虑 n 为偶数的情况；此时 Mermin 不等式不是最强的 [133]。

在 μ_n 中，总共使用的上下文的数量就等于 Lovász 数。因为每个完整的上下文包含 2^n 个投影测量，其中一半出现在 μ_n 中，所以 $|V(G_{Mn})| = 2^{2n-2}$ 。

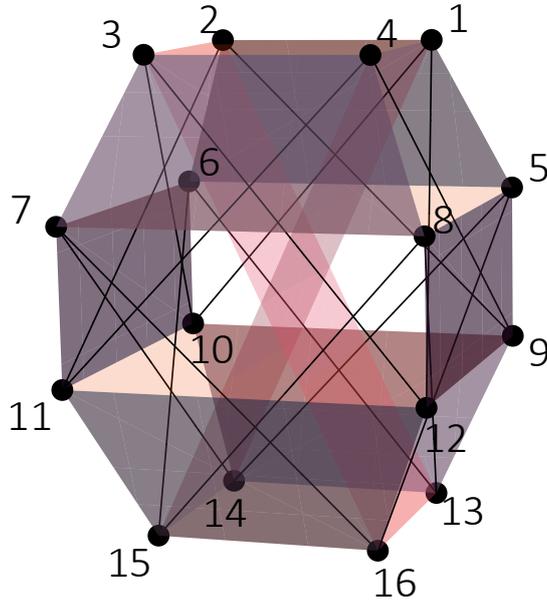


图 4.9 Mermin 不等式的投影测量之间的互斥图。按照 CSW 方法，图中只画出对不等式贡献为正的事件。被线段连起来的点代表互斥事件，而着色平面的四个顶点对应的事件全部互斥。图中画出 $n = 3$ 的情况。

研究 Mermin 不等式对应的互斥图 G_{Mn} 的第一个意义在于，这里量子理论和非互文隐变量理论之间允许的关联强度的比值 $\vartheta/\alpha = 2 - 2 / \left(1 + 2^{\frac{n-1}{2}}\right)$ 随 n 增加：基于互斥图的不等式继承了 Mermin 不等式高违背的特点，其量子违背对实验中可能存在误差的鲁棒性非常好，因此非常适合在高维系统中用于观测互文性。互文性关联强度随着维度增加的另一个例子是 Vidick et al. [134] 的工作，但是总的来说，符合该性质的已知案例寥寥无几。

4.4.2 降低 Mermin 不等式中测量的维度

研究 Mermin 不等式对应的互斥图 G_{Mn} 的第二个意义在于它包含互文浓缩现象。 μ_n 的量子最大值实际上只需利用 $2^n - 1$ 维希尔伯特空间。笔者给出一个构造性证明：记公式 (4.17) 中所有的投影算符的并列为 $\Pi = \{\hat{\Pi}_1, \hat{\Pi}_2, \dots, \hat{\Pi}_{2^{2n-2}}\}^T$ 。根据线性代数的知识，

$$\text{Rank}(A) = 2^n - \text{Dim}(\ker \Pi), \tag{4.18}$$

其中 $\ker \Pi$ 是矩阵 Π 的核，也就是 $\Pi x = \underbrace{\mathbf{00}\dots\mathbf{0}}_n$ 对于 2^n 维向量 x 的解空间。若转回到考虑公式 (4.15)，就会发现这个解空间实际上就是要求其中求和的每一项都给出 -1 ；现在我们已知给出最大违背的 GHZ 态使得求和的每一项给出 $+1$ 。下

面的命题说明,使得公式 (4.15) 中每一项期望反号的态是唯一的,它可以使用 Clifford 代数显式地构造出来。

命题 4.1 $\text{Dim}(\ker \Pi) = 1$. 事实上,只要取:

$$|\text{GHZ}'_n\rangle = (\sigma_z \otimes \mathbb{I}_2^{\otimes n-1}) |\text{GHZ}_n\rangle = (|\underbrace{00 \dots 0}_n\rangle - |\underbrace{11 \dots 1}_n\rangle) / \sqrt{2},$$

就得到

$$\langle M_n \rangle_{\text{GHZ}'_n} = -2^{n-1},$$

也就是说, $|\text{GHZ}'_n\rangle$ 是公式 (4.15) 中每一个二值算符的 -1 本征态。

证明 首先, Pauli 算符的乘积满足以下关系:

$$\sigma_i \sigma_j \sigma_i = (-1)^{1-\delta_{ij}} \sigma_j, \quad i, j \in \{x, y, z\}. \quad (4.19)$$

这可以根据 Pauli 算符的定义直接验算得到。现在,我们注意到公式 (4.15) 中,作用在第一个量子比特上的 Pauli 算符要么是 σ_x , 要么是 σ_y , 因此用上式可以求得: $\sigma_z \sigma_x \sigma_z = -\sigma_x$, $\sigma_z \sigma_y \sigma_z = -\sigma_y$, 从而:

$$\langle M_n \rangle_{\text{GHZ}'_n} = \left\langle \text{GHZ}'_n \left| \frac{1}{2i} \sum_{v \in \{\pm 1\}} v \bigotimes_{j=1}^n (\sigma_x^{(j)} + iv\sigma_y^{(j)}) \right| \text{GHZ}'_n \right\rangle \quad (4.20)$$

$$= \left\langle \text{GHZ}_n \left| \frac{1}{2i} \sigma_z^{(1)} \sum_{v \in \{\pm 1\}} v \bigotimes_{j=1}^n (\sigma_x^{(j)} + iv\sigma_y^{(j)}) \sigma_z^{(1)} \right| \text{GHZ}_n \right\rangle \quad (4.21)$$

$$= \left\langle \text{GHZ}_n \left| -\frac{1}{2i} \sum_{v \in \{\pm 1\}} v \bigotimes_{j=1}^n (\sigma_x^{(j)} + iv\sigma_y^{(j)}) \right| \text{GHZ}_n \right\rangle \quad (4.22)$$

$$= -\langle M_n \rangle_{\text{GHZ}_n} = -2^{n-1}. \quad (4.23)$$

最后证明使得 $\langle M_n \rangle = -2^{n-1}$ 的态是唯一的。考虑从公式 (4.15) 中取出的下面 n 个算符:

$$-\sigma_y \otimes (\sigma_x)^{\otimes n-2} \otimes \sigma_y, \quad -\sigma_x^{\otimes k} \otimes \sigma_y^{\otimes 2} \otimes \sigma_x^{\otimes n-k-2}, \quad k \in \{0, \dots, n-2\}.$$

其中每个算符都是线性无关的,且本征值为 ± 1 . 对应每个本征值有 $n/2$ 个本征矢量,因此本征值为 $+1$ 的本征矢量张开的子空间维度为 2^{n-1} . 进一步地,因为三个 Pauli 算符的本征态组成了彼此的最大无偏基,因此两个算符共同本征值为 $+1$ 的本征矢量张开的子空间维度为 2^{n-2} , 依次类推,这 n 个算符本征值全部为 $+1$ 的本征矢量张开的子空间维度为 $2^{n-n} = 1$. 它就是我们显示构造出来的 $|\text{GHZ}'_n\rangle$. 因此,满足 $\langle M_n \rangle = -2^{n-1}$ 的态是唯一的。 ■

至此，已经证明 Π 中的投影测量可以张开在 $2^n - 1$ 维空间中，但是可能要使用一个不可分割的系统。按照违背定域隐变量理论的程度来说，Mermin 不等式是人类已知的最强形式的量子非定域性 [135]。我们的工作表明，它可以被认为源于较低维度希尔伯特空间中已经存在的互文性。

4.4.3 实验实现

光子的路径自由度是编码高维量子信息强有力的方式。借助于空间光调制 [93-94, 136-137] 技术，已经可以实现高维量子态的精确操控。在这里，考虑到精度要求，我们选用路径自由度编码的空间模式来实现这个对态空间维数要求较高的制备-测量实验。

实验装置如图 4.10 所示，这与图 4.5 几乎相同，不同的是量子信息编码的方式。现在，空间光调制器显示 7 个圆形扇区的全息图，每个扇区对应一个计算基矢，因此总的来说实现了一个 7 维单体量子系统的制备-测量。在每个扇区中加上闪耀光栅，通过调整光栅的最大相位变化来控制 7 个扇区中光子波函数的幅度。为了检查量子态制备和测量的精度，我们遍历实验中使用的所有全息图，用电荷耦合器件相机测量在第二个空间光调制器之前的强度分布，并将它们与理

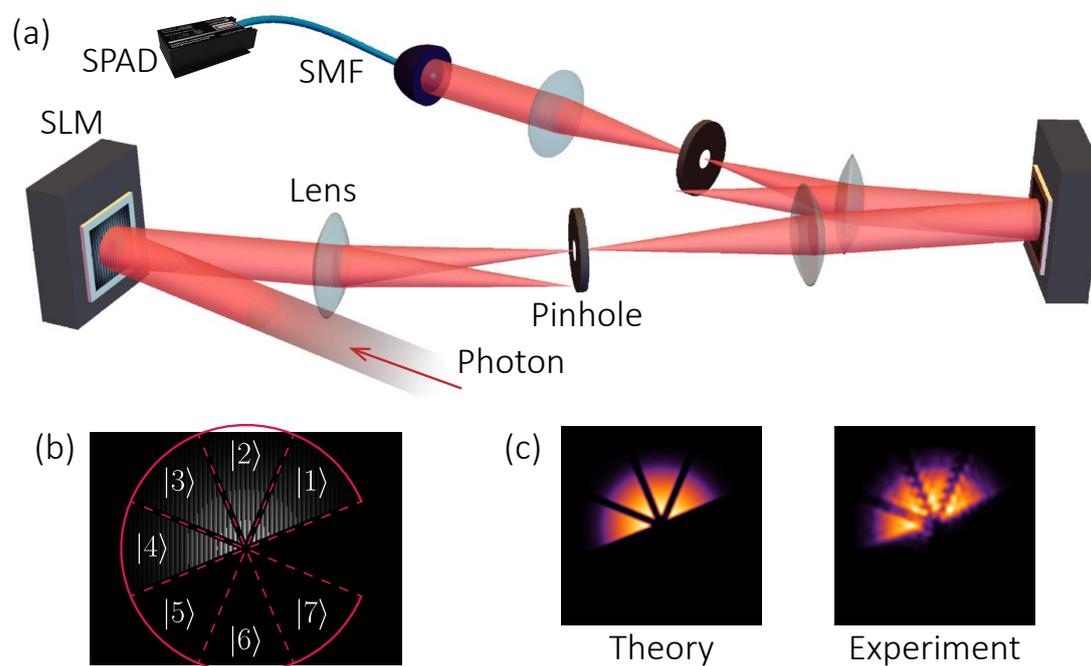


图 4.10 观测互文浓缩的实验装置。上图为总的光路图，与互文超越非定域性的实验光路相同。左下图为路径编码方式的示意图和使用的全息图。右下图为全息图计算的理论光场分布和实验测得光场分布的对比。在下方一排的所有图中，制备的量子态都是 $(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle + |4\rangle)/2$ 。

论预测进行比较。我们通过 Pearson 关联函数 [138] 比较理论和实验制备的路径量子态，计算结果表明，Pearson 关联函数的平均值为 95.5%，从而说明该方法可以实现精确的初态制备和测量。

我们仍然首先测量对于非互文隐变量不等式公式 (4.17) 的违背情况。测量第一项时第一个空间光调制器一直制备同一个初态，第二个空间光调制器遍历所有的测量基，从而可以求得所需的所有投影测量概率。测量第二项时，两个空间光调制器分别遍历所有互斥测量的组合，记录这些基下的投影测量概率，再换算出最终的结果。这些实验数据在图 4.11 中给出。计算结果表明，

$$\mu_3 = 3.821 \pm 0.012. \quad (4.24)$$

以 68.7 个标准偏差违背了非互文隐变量不等式 (4.17)。

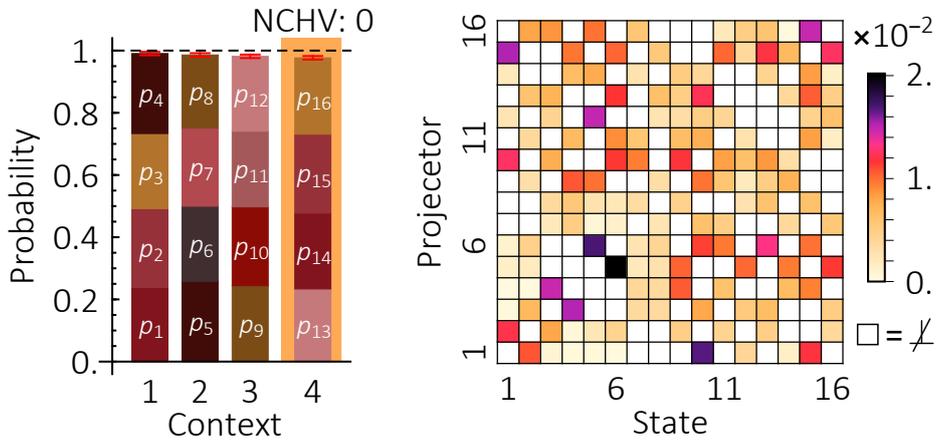


图 4.11 互文浓缩实验结果。左图：各个事件测量概率的堆积条形图。每个条形对应于图 4.9 中的一层中的 4 个事件。按照非互文隐变量模型的预言，当前三个条形几乎为满时，最后一个条形应该是空的，从而不借助不等式就能直观地体现互文性。右图：互斥测量之间的正交性，通过制备每个投影算符的本征态并测量其相应互斥投影算符的投影概率来确定。只有对应于互斥测量的网格被计算并且标为彩色的。

对于 G_{M3} 中的量子互文性还有一种非常直观呈现方式。我们先不考虑公式 (4.17) 的第二项，把第一项可以写成一种“约束条件-推论”的形式：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \Pr(1|i) = 1, \quad \sum_{i=5}^8 \Pr(1|i) = 1, \quad \sum_{i=9}^{12} \Pr(1|i) = 1, \\ \hline \hline 1 \stackrel{Q}{=} \Pr(\text{success}) = \sum_{i=13}^{16} \Pr(1|i) \stackrel{\text{NCHV}}{=} 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

可以看到，最后一个式子中量子力学对于一个概率和的预言与非互文隐变量理论出现了“1=0”的矛盾。这正是 Hardy [77] 展示的一种几乎适用于所有纠缠态的

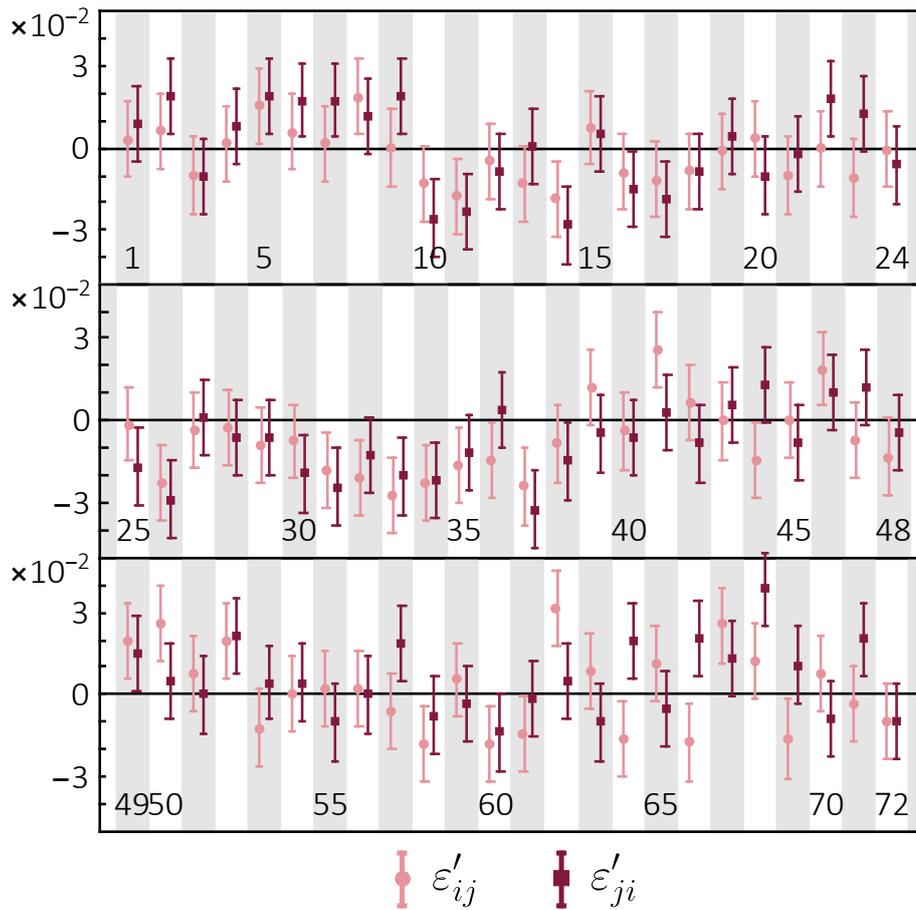


图 4.12 互文浓缩实验的无扰动条件测试结果。标注的数字代表边 $(i, j) \in G_{M3}$ 在图中的顺序，按照先 i 后 j 排序。数据点表示信号传递因子，误差棒表示按照泊松计数统计重新采样得到的 1σ 标准差。

非定域性的方法，并且由 Cabello et al. [139] 推广到互文性的研究，现在常称为“无不等式方法”。我们常把最后这个非互文隐变量禁止的事件在实验中出现的概率称为“成功概率”。利用公式 (4.25) 的形式，我们把测量概率表述为堆积条形图，前三个条形几乎全满，因此符合公式 (4.25) 的约束条件。最后一个全满的条形则给出了强烈支持量子力学的证据，而不符合非定域隐变量理论对于测量概率的预测。

最后，我们补充上对于无扰动条件的测试结果。实验流程是对于互斥图 G_{M3} 中连接两个投影测量的每条边，重新准备初态由第一个投影算符测量后的条件态，然后由第二个投影算符再次测量。这个实验中，我们直接使用公式 (4.5) 的原始形式来刻画无扰动条件。其中，对于第一个测量“未命中”时的条件概率，也就是 $P(0, 1|i, j)$ ，而言，所需的条件态制备方法也是根据 Lüders 规则计算，然后直接用空间光调制器重新制备来实现的。其他所需的量则均已经在前面实验

中测得了。由于信号不能从时间的未来向后传递，代表晚些时刻测量对早些时刻测量影响的 ε_{ij} 和 ε_{ji} 恒为 0。GM3 中 72 条边的 ε'_{ij} 和 ε'_{ji} 测量结果如图 4.12 所示。大多数信号传递因子对于 0 的偏离处在一个标准差的区间内，定量结果给出 $|\overline{\varepsilon'}| = (1.17 \pm 1.39)\%$ 。总的来说，结果相当好地符合无扰动条件。

4.5 小结

我们已经研究了互文性与非定域性的关系，并且从实验上实现了超越非定域性的互文性和互文浓缩。互文浓缩实验的结果展示了任意多体系统中人类已知最强形式的非定域性，总可以转化为更低维系统中的互文性。我们的光学实验通过构建一个空间模式编码的 7 维量子系统，观察到上面构造中最简单的特例所造成的强烈的量子互文性，从而充实了理论发现。更重要的是，这项工作研究的基于 CSW 架构和稳定子 (stabiliser) 的互文性在许多不同量子算法中实现量子计算的重要资源 [22, 81, 84]，因此，我们的工作非常有希望推动高维量子信息处理和新型量子算法的进一步发展。

第5章 图态中的量子互文“全对无”佯谬

这一章我们研究的对象是图态 (graph state)——一种高度纠缠的多体量子态, 并且是实现基于测量的量子计算的基础 [33-34, 140-141]。研究其互文性不仅有助于丰富我们对于图态的操纵和测量手段, 而且对于基于图态量子计算之特性的理解大有裨益。注意, 虽然图态使用多体量子比特实现, 因此其互文性可以表现为非定域性; 但是实现图态的方法往往不能保证各个量子比特处在类空间隔下, 尤其是这些量子比特甚至不一定同时存在 [142]! 因此, 在这一章中将统一称这些佯谬为互文性导致的, 而完全不再提及上一章已经讨论过的非定域性。图态经常也使用无向连通图来定义, 因此请注意区分图态的表示和前面介绍的互斥图。

对于图态已经可以构造出各种具有良好性质的不等式, 例如 Gühne et al. [143], Tóth et al. [144], Cabello et al. [145] 基于 Mermin 不等式的构造和 Baccari et al. [146] 基于 Ardehali 不等式实现的图态自检测不等式。在本工作中, 我们将另辟蹊径, 使用“无不等式方法”研究图态的互文性^①。该方法的一个案例就是上一章的最后, 已经在公式 (4.25) 中展示了一个“无不等式方法”的应用。在“无不等式方法”中, 非互文隐变量理论禁止的事件在可能在量子力学描述的实验中按照一定的成功概率出现。如果该成功概率达到 100%, 那么在一定的前提条件下, 对于单次事件的测量结果, 量子力学与非互文隐变量模型就一定会发生矛盾; 我们将这种情况称为互文性导致的“全对无”佯谬。一言以蔽之, “全对无佯谬”可以用一个公式表示为:

$$\pm 1_{\text{量子}} = \mp 1_{\text{经典}},$$

其中, 等号左右两边分别代表两种理论对于一些可观测量乘积的预言。经典理论指的就是非互文隐变量理论。熟悉第 2 章的读者立刻就会意识到, Peres–Mermin 方块的奇特性质就可以转化为一个“全对无佯谬”。

尽管“全对无”佯谬的研究已在多种系统中进行, 并取得了一定的发现, 但是, 在我们的工作之前, 尚未发现一个统一的构造“全对无”佯谬的方法。我们的工作表明, 图态的互文性资源非常丰富。我们给出一种统一的构造方法, 使得每个图态中的一部分粒子都可以用来构造“全对无”佯谬, 而且这些佯谬在很多情况下可以用于验证图态的形式和进行多体纠缠的目击。配合理论结果, 我们进行线性光学实验, 实现两光子四量子比特图态来测试“全对无”佯谬, 并展示了

^①尽管误差分析还是需要依赖公式 (4.17) 来进行, 但是在理论分析上, 该方法提供一个全新的思路。

所提出的应用。我们的工作将加深对量子力学基础和量子悖论的理解，并有希望在广泛的量子信息任务中得到应用。

5.1 理论基础：“全对无”佯谬和图态概念

为了介绍“全对无”佯谬，我们再次将三量子比特 GHZ 态 $|\text{GHZ}_3\rangle = (|000\rangle + |111\rangle)/\sqrt{2}$ 作为出发点，写出 Mermin 不等式中的所有四个测量的结果：

$$\begin{cases} [E_1 = \sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_x^3] |\text{GHZ}_3\rangle = +|\text{GHZ}_3\rangle, \\ [E_2 = \sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3] |\text{GHZ}_3\rangle = -|\text{GHZ}_3\rangle, \\ [E_3 = \sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_y^3] |\text{GHZ}_3\rangle = -|\text{GHZ}_3\rangle, \\ [E_4 = \sigma_y^1 \sigma_y^2 \sigma_x^3] |\text{GHZ}_3\rangle = -|\text{GHZ}_3\rangle, \end{cases} \quad (5.1)$$

因此， $\langle E_1 \rangle_{\text{GHZ}_3} \langle E_2 \rangle_{\text{GHZ}_3} \langle E_3 \rangle_{\text{GHZ}_3} \langle E_4 \rangle_{\text{GHZ}_3} = -1$ 。但是，若我们将四个测量结果相乘，就会发现这些测量结果不能被任何非互文隐变量模型解释：这些理论允许我们将隐变量预先确定的二值结果 $v(\cdot) = \pm 1$ 分配给每个基本的 Pauli 算符：

$$\sigma_v^i \rightarrow v_v^i, v \in \{x, y, z\}, i \in \{1, 2, 3\},$$

但是，这个分配过程导致：

$$\begin{aligned} v(E_1) &= v_x^1 v_x^2 v_x^3, \\ v(E_2) &= v_x^1 v_y^2 v_y^3, \\ v(E_3) &= v_y^1 v_x^2 v_y^3, \\ \times \quad v(E_4) &= v_y^1 v_y^2 v_x^3 \\ \hline v(E_1)v(E_2)v(E_3)v(E_4) &= \bigotimes_{i=1}^3 \prod_{v \in \{x,y\}} v_v^i = +1. \end{aligned}$$

因此，不管如何调整对应各个 Pauli 算符观测结果的赋值，最后四个可观测量 E 乘积的取值必然为 1，跟量子力学的预言截然相反。这就是著名的 GHZ 佯谬，它是“全对无”佯谬的一个例子，也可以认为是一个态依赖版本的 Peres–Mermin 方块，并且可以通过补上一些单体测量算符，得到如图 5.1 所示的态无关版本的量子互文性的证明——常常被称为“魔星”。笔者只在图中简短地介绍该证明，熟悉第 2 章的读者将已经能够快速地发现其中的妙处。

GHZ 佯谬在 1989 年被发现 [76] 伊始，就引发了对这种多体量子系统奇异性质研究的极大兴趣。Cabello [147] 和 Scarani et al. [148] 进一步将该佯谬推广到四量子比特线性簇态 (linear cluster state)：

$$|\text{LC}_4\rangle = (|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle - |1111\rangle)/2,$$

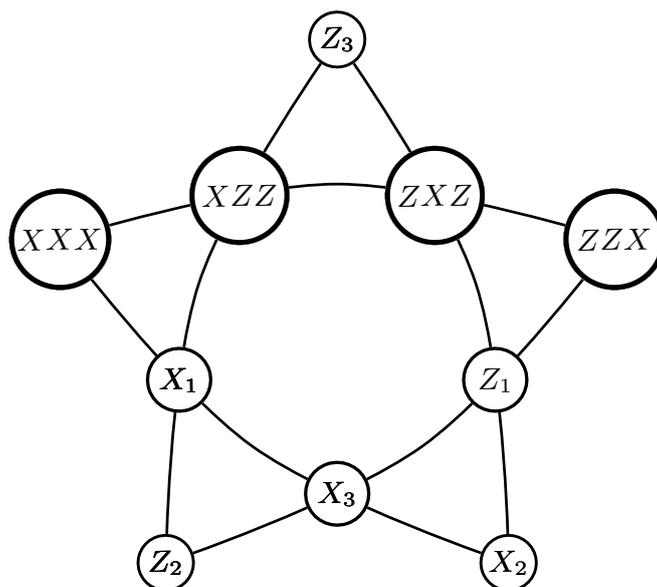


图 5.1 “魔星”——一个态无关的量子互文性证明。五角星每一边连接起来的算符的乘积均为 $\mathbb{I}^{\otimes 3}$, 但是按照上面对 GHZ 佯谬的分析, 水平的一边算符在非互文隐变量模型下乘积为 -1 ; 其他四边为 $+1$. 因此, “魔星”中所有边上的算符在非互文隐变量理论中乘积为 -1 , 但是每个算符都同时出现在两条边上, 因此无论如何调整各个算符的隐变量值, 都不可以对整个“魔星”协调地给出非互文隐变量的赋值结果——总的乘积永远为 $+1$. 图片取自参考文献 [66]。

中。此时, 构成“全对无”佯谬的四个算符形式为:

$$\left\{ \begin{array}{l} [E_1 = \sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_z^3 \mathbb{I}_2^4] |\text{LC}_4\rangle = + |\text{LC}_4\rangle, \\ [E_2 = \sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3 \sigma_x^4] |\text{LC}_4\rangle = + |\text{LC}_4\rangle, \\ [E_3 = \sigma_y^1 \sigma_y^2 \sigma_z^3 \mathbb{I}_2^4] |\text{LC}_4\rangle = - |\text{LC}_4\rangle, \\ [E_4 = \sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_y^3 \sigma_x^4] |\text{LC}_4\rangle = + |\text{LC}_4\rangle. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

与上面的分析完全相同, 发现没有办法使用非互文隐变量确定所有算符的预设值。因此在线性簇态中也出现“全对无”佯谬。

对于什么样的量子态会出现“全对无”类型的互文性呢? Chen [149] 说明至少需要 3 个量子比特才能完成任务; 而三个量子比特的 GHZ 态需要从直积状态开始, 至少使用两个两比特纠缠门才能构造出来。这促使我们寻找一种使用两比特纠缠门表示量子态的方法。接下来要介绍的图态 [80, 150] 就是这样一种表示方法, 上面线性簇态这个名字就是来自于该量子态使用图态语言的表示。图态是将一个量子态 $|G\rangle$ 和一个无向图 $G(V, E)$ 对应起来, 其中 V 和 E 分别是图的顶点和边的集合。每一个顶点代表一个处于计算基矢之最大叠加态 $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$

的量子比特，而每一个边使得对应的两个量子比特经历一次 CZ 操作。正式地说，图态和无向图的对应关系是：

$$|G\rangle = \prod_{(i,j) \in E} \text{CZ}^{i,j} |+\rangle^{\otimes V}.$$

除了这种按照图的边进行 CZ 操作的定义，还有一个按照图的点给出的等价的定义：图态是其所有稳定子的共同 +1 本征态。图态的稳定子是按照每个顶点连接性定义的一组彼此对易的算符：

$$S_i = \sigma_x^{(i)} \prod_{\{j|(i,j) \in E\}} \sigma_z^{(j)}.$$

接下来说明上面两个例子中出现的量子态都和图态局域等价。首先考虑三量子比特的完全图 K_3 ，它被表示在图 5.2 中。利用上面给出的两种计算方法，这个图态都可以显示地求出为： $|K_3\rangle = \{1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, -1\}^\dagger / 2\sqrt{2}$ 。但是，我们仅需要使用局域么正操作，就可以将 $|K_3\rangle$ 转化为 GHZ 态：

$$(\mathbb{I}_2 - i\sigma_x) \otimes (\sigma_y + \sigma_z) \otimes (\mathbb{I}_2 - i\sigma_x) |K_3\rangle = |\text{GHZ}_3\rangle.$$

事实上，所有的多量子比特 GHZ 态都局域等价于全连通图代表的图态^①，因此可以看出 GHZ 态极高的纠缠度。



图 5.2 三量子比特 GHZ 态和四量子比特线性簇态的图态表示。为了转化为正文中的形式，只需在两个图态上分别加上局域操作 $(\mathbb{I}_2 - i\sigma_x) \otimes (\sigma_y + \sigma_z) \otimes (\mathbb{I}_2 - i\sigma_x)$ 和 $\sigma_z \otimes (\mathbb{I}_2 + i\sigma_y) \otimes \mathbb{I}_2 \otimes (\sigma_x + \sigma_z)$ 。

接下来考虑四量子比特的路径图 P_4 ，它被表示在图 5.2 中。这个图态都可以显示地求出为： $|P_4\rangle = (|0++0\rangle + |0+-1\rangle + |1--0\rangle + |1-+1\rangle) / 2$ ，其中 $|-\rangle = (|0\rangle - |1\rangle) / \sqrt{2}$ 。类似上面完全图的例子，有

$$\sigma_z \otimes (\mathbb{I}_2 + i\sigma_y) \otimes \mathbb{I}_2 \otimes (\sigma_x + \sigma_z) |P_4\rangle = |\text{LC}_4\rangle.$$

由于路径图的表示就是连接一簇顶点的线状路径，因此有了线性簇态的名字。

^①标准的表示是星图，但是用一个后面将提到的局域补图 (local complementing) 操作，就可以在两者之间彼此转化。星图更侧重表现对 GHZ 态做一个 σ_z 测量就导致解纠缠的特点，而完全图则更好地体现 GHZ 态的对称性。

在结束本节之前，笔者希望说明公式 (5.2) 中的“全对无”佯谬不是不可约化的 [151]。这是因为最后一个量子比特的测量只有一个测量方向，因此肯定有一个非互文隐变量理论至少可以解释这一个量子比特的测量结果。更直观地看这个问题，我们将第三个量子比特的测量算符用 $\sqrt{\sigma_y}$ 操作一下，效果是交换 σ_x 和 $-\sigma_z$ 。操作后的“全对无”佯谬就变成：

$$\left\{ \begin{array}{l} [E_1 = \sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_x^3 \mathbb{I}_2^4] |\text{LC}_4\rangle = -\sqrt{\sigma_y} |\text{LC}_4\rangle, \\ [E_2 = \sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3 \sigma_x^4] |\text{LC}_4\rangle = +\sqrt{\sigma_y} |\text{LC}_4\rangle, \\ [E_3 = \sigma_y^1 \sigma_y^2 \sigma_x^3 \mathbb{I}_2^4] |\text{LC}_4\rangle = +\sqrt{\sigma_y} |\text{LC}_4\rangle, \\ [E_4 = \sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_y^3 \sigma_x^4] |\text{LC}_4\rangle = +\sqrt{\sigma_y} |\text{LC}_4\rangle. \end{array} \right.$$

但是，再对比公式 (5.1) 就会发现，当等号两边的态取 $\sigma_z^{(1)} |\text{GHZ}_3\rangle \otimes |+\rangle$ 时，同样满足所有的四个关系式。其中 GHZ 态前面的 σ_z 用来使得四个式子全部得到一个 -1 系数——这正是前一章证明定理 4.1 中使用的技巧。因此，使用一个部分可分态，甚至上面两者的混态，都可以观测到“全对无”佯谬。一个问题自然而然地产生：什么情况下，一个“全对无”佯谬只对一个特定的量子态成立？进一步地，我们知道 GHZ 佯谬是不可以再约化的，而线性簇态的“全对无”佯谬可以约化为 GHZ 佯谬，那么如果不考虑高维情形（关于该情形的讨论，汤卫东老师的工作 [152] 已经进行了非常精彩的讨论），只考虑 Pauli 算符组成的“全对无”佯谬，是否存在除了 GHZ 佯谬之外的其他不可约化的“全对无”佯谬？下面一节的构造对这两个问题给出了肯定的回答。

5.2 一类广泛的图态“全对无”佯谬

现在给出不同于 GHZ 佯谬的“全对无”佯谬构造。构造的出发点是：只要是稳定子乘积构成的算符，都以 $|G\rangle$ 作为 $+1$ 本征态，因此可以考虑这些算符的组合，要求其非互文隐变量理论的赋值永远为 -1 ，即得到一个“全对无”佯谬。那么如何使得非互文隐变量理论的赋值与量子力学的观测量期望值之间差一个负号呢？我们仍然从 GHZ 佯谬的形式入手：

引理 5.1 图态的无向图表示形式中存在的子图——长度为 3 的路径图 P_3 ，其所有稳定子的乘积写成 Pauli 算符后，前面将包含一个负号。

证明 我们记这个路径图为 2—1—3。首先，对于这些顶点连接到的子图外的顶点来说，稳定子贡献的 Pauli 算符永远都是 σ_z ，彼此对易，不会出现负号。所以只需关注这三个顶点，它们只可能有两种连接形式：线性连接（2—3 断开）或者全连接（2—3 连通）。对于顶点 1 来说，其上面的算符永远都是 $\sigma_z \sigma_x \sigma_z = -\sigma_x$ ，

出现一个负号。对于另外两个顶点来说，不连接的时候算符分别是 $\sigma_x\sigma_z$ 和 $\sigma_z\sigma_x$ ，前面系数乘积总是 1；连接的时候算符分别是 $\sigma_x\sigma_z\sigma_z$ 和 $\sigma_z\sigma_z\sigma_x$ ，两个 σ_z 互相抵消，前面系数乘积仍然是 1。最后，三个稳定子的乘积表示成 Pauli 算符，只在节点 1 出现一个负号。 ■

有了这个引理，我们就可以考虑图态中的一个星图，在其中选取奇数个通过中心点的路径图，然后辅以其他算符的乘积，使得每个泡利算符最终出现偶数次，这样就保证非互文隐变量理论的赋值永远为 -1 。下面的定理 5.2 给出我们的构造方法。

定理 5.2 给定图态 $|G\rangle$, $|V(G)| = m$, 其无向图表示的邻接矩阵为 C , 且第 1 个顶点与第 2 ~ n 个顶点均相连: $C_{1k} = 1, k \in \{2, \dots, n\}$. 记顶点 i 对应的稳定子为 S_i , 那么对于表 5.1 中可观测量 $\{E\}$ 的测量, 将导致一个“全对无”佯谬。

定理 5.2 的证明较为繁复, 有兴趣的读者请查阅文末的已发表论文 [4]。证明的思路则与构造过程非常接近, 只需要证明每个稳定子最终出现偶数次, 以及子图 P_3 对应的乘积形式最终出现奇数次即可。

5.2.1 量子态验证

定理 5.2 另有一个很强的推论:

推论 5.3 当 $n = m$ 为奇数时, 导致定理 5.2 中描述的“全对无”佯谬出现的量子态是唯一的。

证明 定理 5.2 中的 $n + 1$ 个算符, 任何 n 个都可以用来重新生成稳定子 $\{S_1, \dots, S_n\}$, 由图态的构造方法可知, 稳定子的基态是唯一的。 ■

作为应用, 首先对于所有 5 量子比特的图态给出“全对无”佯谬的构造方

$\{E\} :=$ (n 为奇数)	$\{(-1)^{a_i} S_1^{a_i} S_i S_{i+1} \mid i \in \{2, \dots, n-1\}\}$ $\cup \{S_1\} \cup \{S_1^{a_n} S_j \mid j \in \{2, n\}\}.$
$\{E\} :=$ (n 为偶数)	$\{(-1)^{a_i} S_1^{a_i} S_i S_{i+1} \mid i \in \{2, \dots, n\}\} \cup \{S_1\}.$
记号的定义	$a_i = 1 + C_{2n} + \sum_{k=2, k \neq i}^{n-1} C_{k(k+1)},$ $S_1^{a_i} = \begin{cases} S_1, & \text{Mod}[a_i, 2] = 1, \\ \mathbb{I}_2, & \text{Mod}[a_i, 2] = 0, \end{cases}, S_{n+1} = S_2.$

表 5.1 图态中“全对无”佯谬的构造。图态的无向图表示的邻接矩阵为 C , 顶点 i 对应的稳定子为 S_i 。

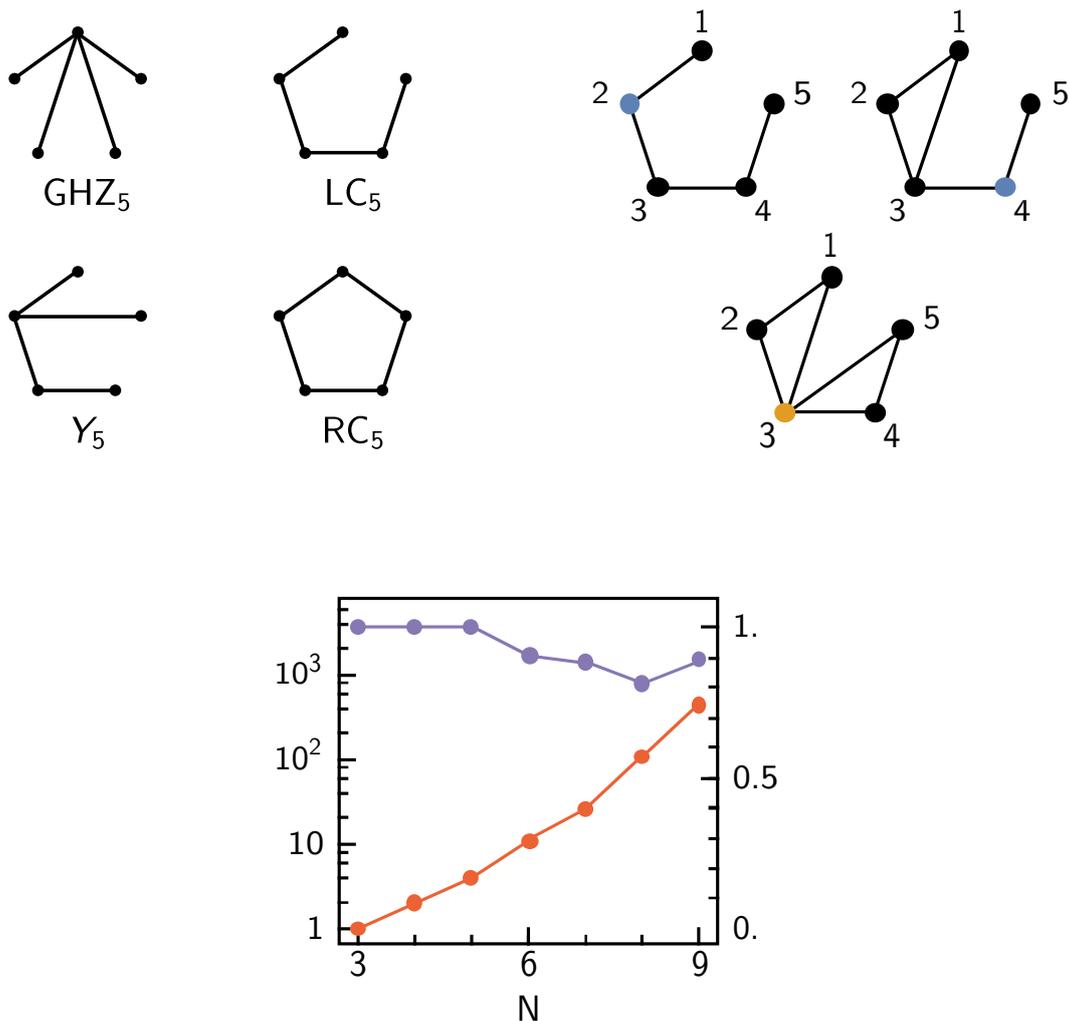


图 5.3 5 量子比特的图态、局域等价、以及量子态验证。左上图给出所有在局域补图操作下不等价的 5 量子比特图态。右上图是一个局域补图操作的过程，经过两次蓝点处为中心点的局域补图操作，得到一个与 $|LC_5\rangle$ 局域等价的图态，它包含一个中心顶点，适合使用定理 5.2 构造“全对无”佯谬，并且使用定理 5.3 进行图态的量子态验证。下图是量子比特数 $n \leq 9$ 时，可通过局域补图操作转化为包含中心点的图的个数（橙红色）和在所有图态中所占的比例（紫色）。

法。在这个构造中希望展示的是局域补图操作与定理 5.2 配合使用的巨大潜力。首先介绍图态的局域补图 [150] 操作。对于图态 $|G\rangle$ 中一个顶点 a 进行局域补图操作，将得到一个新的图态 $|\tau_a(G)\rangle = U_a^\tau(G)|G\rangle$ ，其数学形式是：

$$U_a^\tau(G) = e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_x^{(a)}} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_z^{\mathcal{N}(a)}}.$$

其中， $\mathcal{N}(a) = \{b \in V(G) \mid (a,b) \in E(G)\}$ 指与局域补图操作作用顶点相邻的顶点。局域补图操作的效果是反转子图 $N(a)$ 中顶点的连通性——因此可以证明笔者在上一节中宣称的结果：星图和完全图描述的是同一个图态。能够使用局域补图操作互相转化的图态都是局域等价的，因此独立的图态数量大大减少。这个结果在

我们工作中的意义是，只要能够使用局域补图操作使得图态的表示中出现一个中心点，那么就可以用定理 5.2 构造一个包含了所有顶点的“全对无”佯谬，从而得到大量新的、且与 GHZ 佯谬不同的“全对无”佯谬。

大多数图态都不直接包含一个中心点。然而，通过局域补图操作，极高比例的图态都可以被转化为包含中心点的等价形式，如图 5.3 所给出。一个图态的所有可能等价形式可以通过计算机编程 [153] 有效地获得。对于 $m \leq 9$ ，可以发现 591 个可能的图态中，519 个都可以进行局域补图获得一个中心点。对于 $m = 9$ 的情况，有 392 个不同的图态可以构造出独特的“全对无”佯谬，并且可以反过来利用这些佯谬来验证这些图态。

在图 5.3 中给出所有局域不等价的 5 量子比特图态，一共只有 4 种可能的形式。它们都可以使用局域补图操作转化为有中心点的图，因此又可以借助定理 5.3 进行基于“全对无”佯谬的量子态验证。笔者再给出一个其他文献中未有报道的案例。将 5 量子比特线性簇态进行局域补图操作得到中心点后，构造“全对无”佯谬，再利用局域补图的逆操作将图态和“全对无”佯谬中的算符都转化回去之后，我们得到：

$$\left\{ \begin{array}{l} [E_1 = \sigma_z^1 \sigma_y^2 \sigma_x^3 \sigma_y^4 \sigma_z^5] |LC_5\rangle = -|LC_5\rangle, \\ [E_2 = \mathbb{I}_2^1 \sigma_z^2 \sigma_y^3 \sigma_y^4 \sigma_z^5] |LC_5\rangle = +|LC_5\rangle, \\ [E_3 = \sigma_z^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3 \sigma_z^4 \mathbb{I}_2^5] |LC_5\rangle = +|LC_5\rangle, \\ [E_4 = \sigma_x^1 \sigma_z^2 \mathbb{I}_2^3 \mathbb{I}_2^4 \mathbb{I}_2^5] |LC_5\rangle = +|LC_5\rangle, \\ [E_5 = \mathbb{I}_2^1 \mathbb{I}_2^2 \mathbb{I}_2^3 \sigma_z^4 \sigma_x^5] |LC_5\rangle = +|LC_5\rangle, \\ [E_6 = \sigma_x^1 \mathbb{I}_2^2 \sigma_x^3 \mathbb{I}_2^4 \sigma_x^5] |LC_5\rangle = +|LC_5\rangle. \end{array} \right. \quad (5.3)$$

这种只对一个量子态出现的 5 量子比特“全对无”佯谬已经被用来构建量子纠错码 [154]。因此，我们的量子态验证工具给出一种新的构造量子纠错码的方法。

5.3 实验制备四量子比特图态

由于观察“全对无”佯谬需要至少使用 3 个量子比特，因此使用单独一个偏振编码的纠缠光源就不足以完成任务；使用多对光源时则会显著降低计数率。幸运的是，陈增兵、潘建伟、张永德老师和 Brukner, Zeilinger [155] 的团队设计实现一个偏振-路径混合编码的双光子四量子比特纠缠光源，大大提高了所需量子态的计数率。在本工作中，我们借鉴这种混合编码的技术，用一个统一的实验装置制备所有的 3 和四量子比特图态，它们包括 3 和四量子比特 GHZ 态和四量子比特线性簇态，依次记为 $|GHZ_3\rangle$, $|GHZ_4\rangle$ 和 $|LC_4\rangle$ 。

先介绍量子态制备和测量对应的量子线路。我们从一对偏振处于最大纠缠态 $|\Phi^+\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ 的量子比特状态开始，用两个偏振到路径的 CNOT 门获

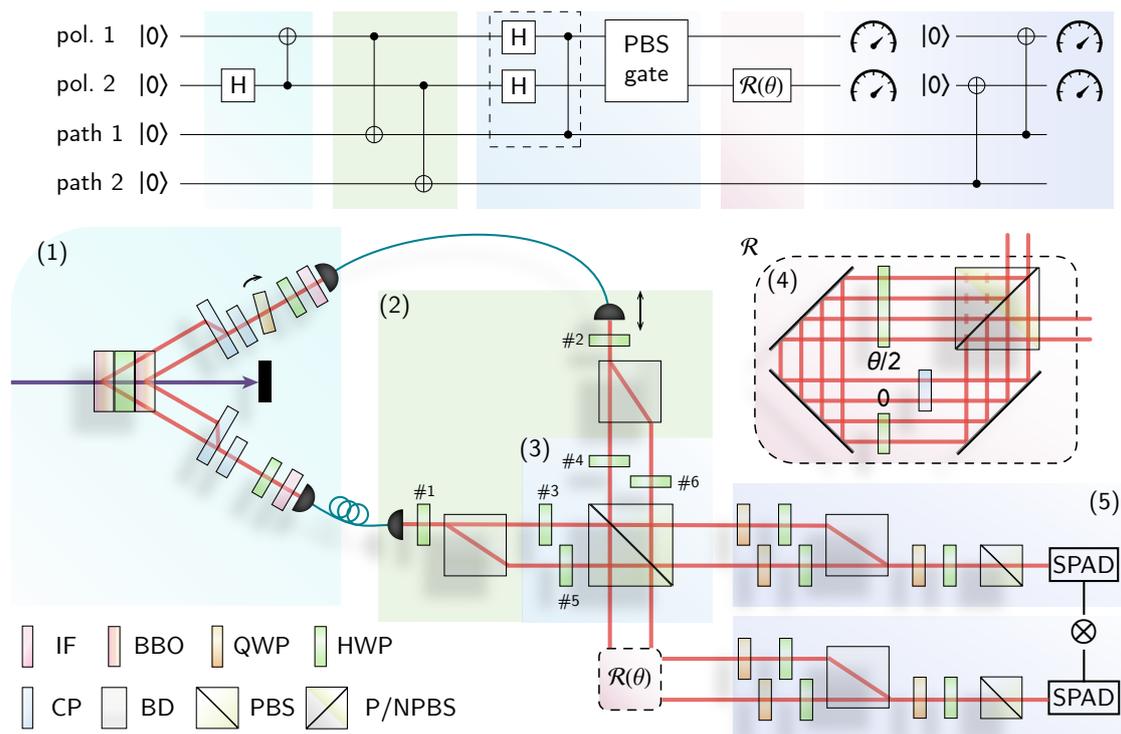


图 5.4 观测图态“全对无”佯谬的量子线路实验装置。上图表示使用偏振和路径自由度产生和测量 4 量子比特线性簇态 $|LC_4\rangle$ 和 GHZ 态 $|GHZ_4\rangle$ 的量子线路。其中，虚线框中的门操作仅用来生成线性簇态。下图表示量子线路的光学实现。从左到右各个色块依次表示 (1) 光子源，脉冲激光器泵浦一个三明治结构非线性晶体，在空间和时间补偿后产生两个偏振纠缠光子；(2) 初态制备。两个光子被进一步编码为偏振和路径模式。(3) 熔接门。(4) 用来制备更丰富量子态的一个非么正演化，这里用不到。(5) 偏振和路径模式的联合测量，在第 3 章中已经介绍。IF: 干涉滤光片，HWP: 半波片，QWP: 四分之一波片，CP: 时间和空间补偿晶体，BD: 光束偏移器，PBS: 偏振分束器，P/NPBS: 特制的分束器，一半为 PBS，另一半为不依赖偏振的 50:50 分束器。

得四量子比特的 GHZ 态 $|GHZ_4\rangle$ 。如果需要通过三量子比特的 GHZ 态，只需将任何一个自由度在 $|+\rangle$ 上投影测量，剩下三个量子比特就后选择出一个 GHZ 态。要生成线性簇态 $|LC_4\rangle$ 则需要实现两个偏振量子比特之间 CZ 的操作，但是我们将其分解为一个偏振-路径比特之间的 CZ 和一个两个偏振量子比特之间的熔接门，从而将后选择的成功率进一步提高 3 倍以上。熔接门的效果相当于使偏振量子比特投影到 $|00\rangle\langle 00| - |11\rangle\langle 11|$ 上，再辅以一些单量子比特操作即可将系统整体制备到 4 量子比特簇态 $|LC_4\rangle$ 。

接下来使用线性光学具体实现这个线路。偏振纠缠光子对的制备和偏振-路径联合测量在第 3 章中都已经介绍，这里只重点介绍实验中最精彩的部分：用熔接门实现四量子比特簇态的制备。首先两个光束偏移器将垂直偏振光子的波函数转移到下路；水平偏振的光子仍然处于上路。这相当于使得两个路径量子比特被偏振量子比特做了 CNOT 操作，整个双光子态已经是一个 GHZ 态。在装

置的中心，两路光子在一个偏振分束棱镜的两处分别干涉。这里再次使用二次量子化的语言来分析光量子态的演化。将从左边和上边输入偏振分束棱镜的光子的产生算符分别记为 $\alpha_{\mu\nu}^\dagger$ 和 $\beta_{\mu\nu}^\dagger$ ，其中 $\mu \in \{H, V\}$ 区分光子的偏振模式； $\nu \in \{u, d\}$ 区分光子的路径模式。从右边和下边离开偏振分束棱镜的光子的产生算符则分别记为 $\gamma_{\mu\nu}^\dagger$ and $\delta_{\mu\nu}^\dagger$ 。这样，在偏振分束棱镜上就将发生下述的模式转换：

$$\alpha_{Hv}^\dagger \rightarrow \gamma_{Hv}^\dagger, \quad \alpha_{Vv}^\dagger \rightarrow i\delta_{Vv}^\dagger, \quad \beta_{Hv}^\dagger \rightarrow \delta_{Hv}^\dagger, \quad \beta_{Vv}^\dagger \rightarrow i\gamma_{Vv}^\dagger.$$

我们进一步记图 5.4 中的半波片 #3 ~ #6 角度为 $\theta_3/2 \sim \theta_6/2$ ，就可以显示地写出到达偏振分束棱镜的光场波函数，为：

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\cos \theta_3 \alpha_{Hu}^\dagger + \sin \theta_3 \alpha_{Vu}^\dagger)(\cos \theta_4 \beta_{Hu}^\dagger + \sin \theta_4 \beta_{Vu}^\dagger) + (-\sin \theta_5 \alpha_{Hd}^\dagger + \cos \theta_5 \alpha_{Vd}^\dagger)(-\sin \theta_6 \beta_{Hd}^\dagger + \cos \theta_6 \beta_{Vd}^\dagger) \right] |0\rangle.$$

再代入模式转换关系，输出偏振分束棱镜的光场波函数即可求得为：

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\cos \theta_3 \gamma_{Hu}^\dagger + i \sin \theta_3 \delta_{Vu}^\dagger)(\cos \theta_4 \delta_{Hu}^\dagger + i \sin \theta_4 \gamma_{Vu}^\dagger) + (-\sin \theta_5 \gamma_{Hd}^\dagger + i \cos \theta_5 \delta_{Vd}^\dagger)(-\sin \theta_6 \delta_{Hd}^\dagger + \cos \theta_6 i \gamma_{Vd}^\dagger) \right] |0\rangle.$$

但是，由于最后只进行符合探测，只有同时包含 γ 和 δ 的输出模式才被记录，因此，最后我们得到下述的波函数：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\cos \theta_3 \cos \theta_4 \gamma_{Hu}^\dagger \delta_{Hu}^\dagger - \sin \theta_3 \sin \theta_4 \gamma_{Vu}^\dagger \delta_{Vu}^\dagger) \right. \\ & \quad \left. + (\sin \theta_5 \sin \theta_6 \gamma_{Hd}^\dagger \delta_{Hd}^\dagger - \cos \theta_5 \cos \theta_6 \gamma_{Vd}^\dagger \delta_{Vd}^\dagger) \right] |0\rangle \\ & = \cos \theta_3 \cos \theta_4 |HHuu\rangle - \sin \theta_3 \sin \theta_4 |VVuu\rangle \\ & \quad + \sin \theta_5 \sin \theta_6 |HHdd\rangle - \cos \theta_5 \cos \theta_6 |VVdd\rangle. \end{aligned}$$

这样，构造量子态的问题就转化为了求解波片角度的问题。该装置能产生的量子态非常灵活，例如我们取所有波片角度都为 0，就得到一个 σ_z 作用过的 GHZ 态；如果我们取 $\{\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\} = \{45^\circ, -45^\circ, 45^\circ, 45^\circ\}$ ，就恰好得到线性簇态。

5.4 “全对无”佯谬的观测和应用

在观测具体的“全对无”佯谬之前，首先刻画包含两个路径熔接门的工作情况。其原理与 Hong–Ou–Mandel 干涉非常类似，只是因为偏振分束棱镜是偏振依赖的，因此在后面还要使用半波片对偏振做一个 Hadamard 操作，从而擦除原先光子携带的偏振信息。对于两个路径，我们分别进行 Hong–Ou–Mandel 干涉实

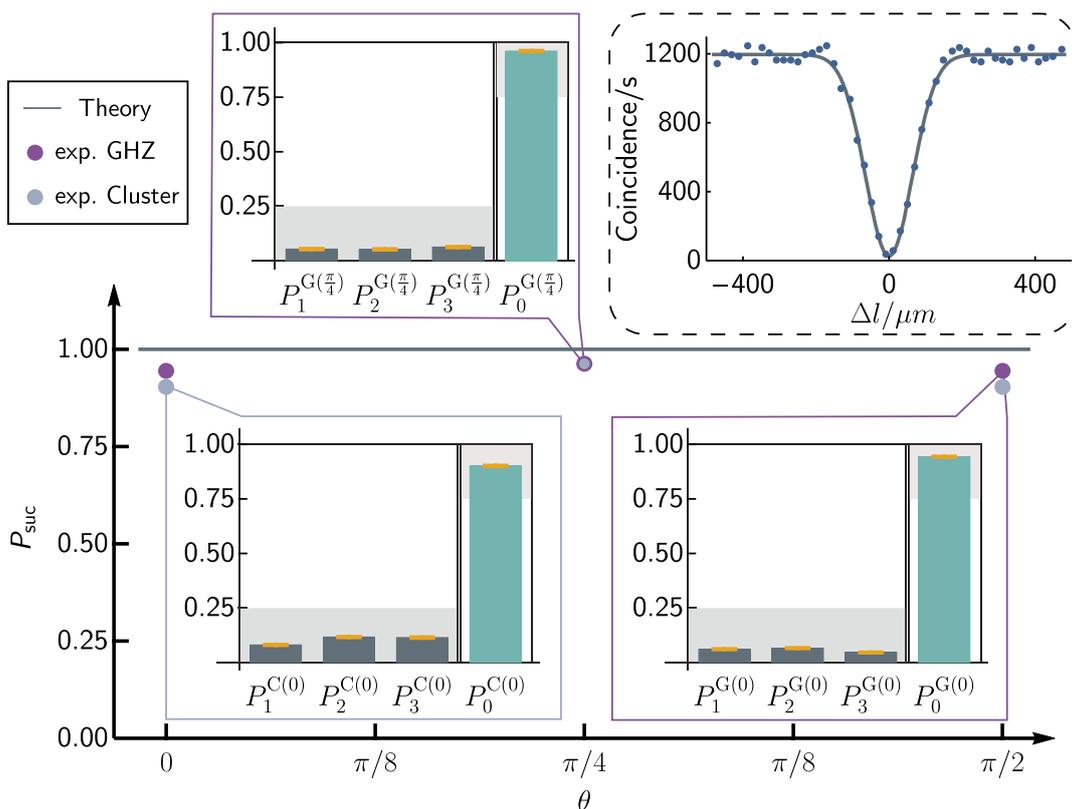


图 5.5 图态“全对无”佯谬的实验结果。数据点：“全对无”佯谬的成功概率。误差棒对应于使用泊松计数统计计算的 1σ 标准差。灰色点对应线性簇态、紫色点对应 GHZ 态。子图：具体观测的每个事件发生的概率。阴影区域表示 75% 可见度阈值给出的可以有效否定非互文隐变量理论的区域。虚线框：两个光子的 Hong–Ou–Mandel 干涉数据（可见度 0.971）和其高斯拟合曲线。

验，验证两个光子到达偏振分束棱镜时间和波函数空间形貌的重合性。测量结果在图 5.5 中给出，两路干涉的平均可见度达到 97.1%，说明两个到达偏振分束棱镜的光子高度全同，同时性非常好。

接下来对三种图态分别观测“全对无”佯谬。尽管实验中可能存在一定的误差，不一定真正能够实现所有概率完美地为 0 或 100%，但是少量的不完美性并不影响佯谬的说服力。通过将“全对无”佯谬转化回非互文隐变量不等式，[156]指出，对于这种 4 个条件给出矛盾的“全对无”佯谬，干涉可见度只要达到 75% 就足以表明互文性的存在。我们的实验结果如图 5.5 所示，不仅计数率符合量子力学的预期，而且干涉可见度大大地超过了临界值：非互文隐变量模型中不会出现的事件，在实验中出现的概率对于 $|\text{GHZ}_3\rangle$, $|\text{GHZ}_4\rangle$ 和 $|\text{LC}_4\rangle$ 而言，分别达到 96.2%, 94.4% 和 90.1%，分别超过了可见度的临界值 93.9, 72.7, 和 56.0 个标准偏差。由于 $|\text{GHZ}_3\rangle$ 符合定理 5.3 的条件，因此实验结果可以用于验证我们制备的

量子态应当在一定的精度范围内就是 $|\text{GHZ}_3\rangle$ 。一个自然而然的问题是：能否使用实验结果推断制备的量子态与目标态之间的保真度？我们下面进一步利用已经取得的实验数据来研究这个问题。

5.4.1 保真度估计与纠缠目击

将公式 (5.1) 中的所有算符和它们对应本征值相乘再求和，得到一个非互文隐变量不等式：

$$\langle \mathcal{E} \rangle_\psi := \sum_{k=1}^4 \langle f_k E_k \rangle_\psi \stackrel{\text{NCHV}}{\leq} 2. \quad (5.4)$$

其中 $f_k := \langle \text{GHZ}_3 | E_k | \text{GHZ}_3 \rangle$ 是算符对应的本征值。我们注意到由于能够进行定理 5.3 中的量子态验证， $\sum_{k=1}^4 f_k E_k$ 的最大本征值必定是非简并的；再由于每个稳定子都同时出现在 \mathcal{E} 的偶数个元素中，因此 $\sum_{k=1}^4 f_k E_k$ 次大的本征值为 0。这说明，求得任何正的 $\langle \mathcal{E} \rangle_\psi$ 值都代表使用的量子态 $|\psi\rangle$ 与目标态 $|\text{GHZ}_3\rangle$ 存在交叠，且容易算得 $\langle \mathcal{E} \rangle_\psi$ 对保真度给出一个下限：

$$F(\psi, \text{GHZ}_3) \geq \frac{1}{4} \langle \mathcal{E} \rangle_\psi. \quad (5.5)$$

利用实验数据，我们求得对于实验制备的量子态 $|\psi^*\rangle$, $\langle \mathcal{E} \rangle_{\psi^*} = 3.792$ 。按照公式 (5.5) 计算，可知：

$$F(\psi^*, \text{GHZ}_3) \geq 89.6\%. \quad (5.6)$$

因此，我们不依赖量子态层析就取得制备的量子态和目标态之间的保真度，大大降低了资源消耗。

进一步地，我们将这个结论推广到任意多体的量子态验证场景中。由于此时 \mathcal{E} 的谱的特点与上述 GHZ 态的情况仍是相似的，因此得到：

推论 5.4 将可通过“全对无”佯谬进行量子态验证的 $n+1$ 个算符乘以在图态下的本征值并求和后，将得到一个非互文隐变量不等式：

$$\mathcal{J}_n = \sum_{k=1}^{n+1} \langle f_k E_k \rangle_\psi \stackrel{\text{NCHV}}{\leq} n-1. \quad (5.7)$$

那么测得不等式的值与量子态和目标态的保真度有以下关系：

$$\frac{1}{4}(\mathcal{J}_n - n + 3) \leq F(\psi, G_n) \leq \frac{\mathcal{J}_n + n + 1}{2n + 2}. \quad (5.8)$$

进一步地，非互文隐变量不等式 5.7 被违背： $\mathcal{J}_n \geq n-1$ ；将导致：

1. 量子态与目标态的保真度至少达到 50%；

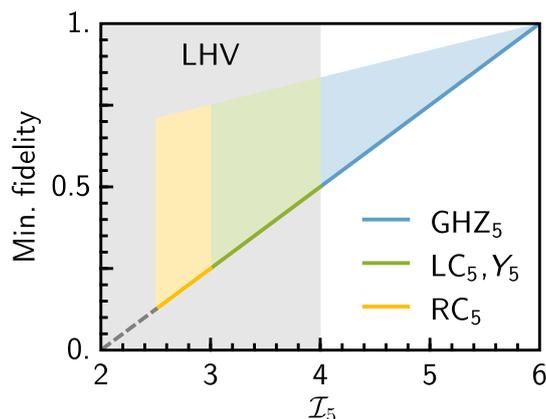


图 5.6 非互文隐变量违背与量子态和目标态保真度的关系。图中给出目标态 5 量子比特所有图态的情形。彩色区域意味着至少有两个量子比特处于纠缠态，违反非互文隐变量不等式等于观测到真多体纠缠。

2. 量子态不可能被写成任何两个子系统直积的形式。

证明 公式 (5.8) 是 \mathcal{E} 的谱的特点导致的结果。注意到 \mathcal{E} 次大的和最小的本征值分别为 $n-3$ 和 $-n-1$ ，用它们分别和最大的本征值组合，再计算所得态与目标态的保真度以及其对于不等式 (5.7) 的违背，即得到所需结果。

对于后两个命题的证明：

1. 是上面保真度估计的直接推论。在图 5.6 中，给出应用在四种 5 量子比特图态上的结果。注意由于这些图态有着不同的 Schmidt 数，因此当按照对应的不等式所求出的值大于彩色区域的左侧边界时，表示量子系统已经存在纠缠——没有任何直积态和目标态能够达到这么高的保真度。
2. 是因为若使用目标态与另一个本征态线性组合，获取到能够分解为子系统直积形式的态时，目标态所占的比例必须不超过 50%。

因此，上面的证明过程，展示了我们构造的“全对无”佯谬在保真度估计和纠缠目击方向上的应用潜力。 ■

5.4.2 量子导引的“全对无”佯谬

上面我们已经针对 n 为奇数时图态的“全对无”佯谬和量子态验证进行了一系列的实验。相比之下，对于 n 为偶数的情形还没有仔细展开研究。当“全对无”佯谬不能用于量子态验证时，它有没有其他的作用呢？陈景灵老师 [157] 等最先指出，“全对无”佯谬也适合用于研究量子导引 [158] 这种不对称的非经典特性，并且由李传锋和许金时研究组对相应工作展开了实验验证 [159]。在本工作中，我们发现该方法也可以被推广到多体图态系统中，以“全对无”佯谬的形

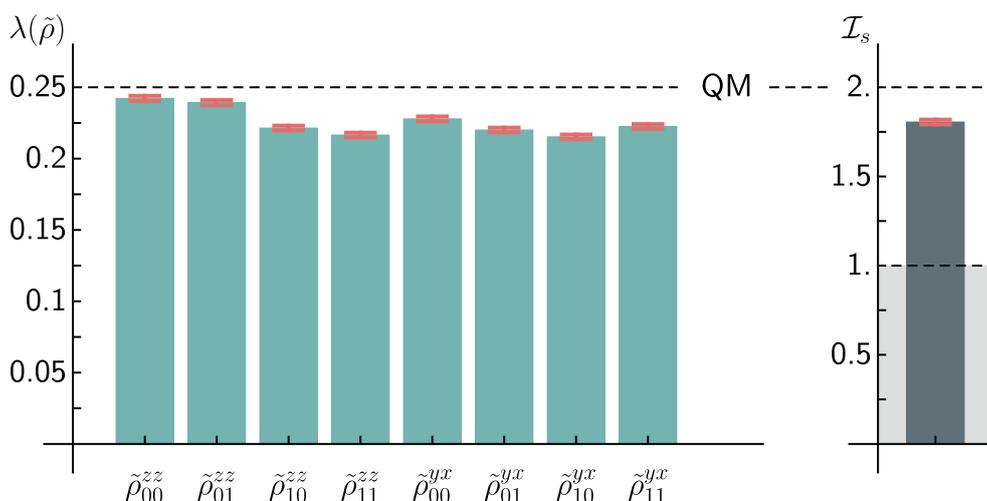


图 5.7 图态“全对无”佯谬的实验结果。左：根据 Alice 一方的测量选择和结果，计算得到的 Bob 的条件态的主本征值。右图：计算得到的导引参数 \mathcal{I}_s 与定域隐态模型预测 $\mathcal{I}_s = 1$ 之间的矛盾。误差棒对应于通过计数统计计算的 1σ 标准差。

式观测到偶数个量子比特之间的量子导引现象。由于量子导引对于隐变量模型的要求较非定域性和互文性要来得宽松，因此我们的工作实现了“全对无”佯谬对于更广泛范围量子非经典特性的观测。

我们只展示一个案例的构造。考虑四量子比特线性簇态 $|\text{LC}_4\rangle$ ，其中前两个粒子被一个观察者 Alice 持有，后两个粒子被另一个观察者 Bob 持有。Alice 可以导引 Bob 指的是当 Alice 对持有的粒子施行测量时，Bob 持有粒子的状态不能被解释为是从一个定域的隐态集合中选出的 [158]。类似于 Fine 定理中的表述，这一现象可以表述为 Alice 和 Bob 观测时得到的全局联合概率，不能被下面的定域混合隐变量-隐态模型所描述：

$$\Pr(a, b|x, y) = \int_{\mu} \Pr(a|x, \mu) \text{Tr}(\rho(\mu) \hat{\Pi}_{b,y}) d\mu.$$

对应到四量子比特线性簇态的情况时，该定域隐态模型将会导致 Alice 以任意两组测量基对手上的两个量子比特进行正交完备测量时，Bob 一方隐态的最大本征值之和都为 1。但是，实际上 Alice 可以选择使得测量之后 Bob 方的态接近一个纯态，此时隐态的最大本征值之和将为 2，这样就出现了一个“ $2=1$ ”的矛盾。

为了在实验中实现这个导引佯谬，我们使得 Alice 的两组测量基分别是 $\sigma_z \otimes \sigma_z$ 和 $\sigma_y \otimes \sigma_x$ ，对应于这两组测量基，Bob 分别测量两个算符 $\sigma_x \sigma_x + \sigma_y \sigma_y$ 和 $\sigma_y \otimes \sigma_x + \sigma_x \otimes \sigma_y$ 的期望值。由于这两个算符的谱均为 $\{2, 0, 0, -2\}$ ，因此绝对值较大的本征值将可以用来判定 Bob 的态有多么接近纯态——这正是上面保真度估计部

分我们使用的技巧。在实验中，我们测得 8 个条件态的本征值如图 5.7 所示，它们的和达到 1.805 ± 0.014 ，超出定域隐态模型的上限 59 个标准差，从而实现了使用“全对无”佯谬进行量子导引的目击。

5.5 小结

通过构造“全对无”形式的佯谬，我们实验观测到图态中广泛存在的非定域性。我们的理论方法包括量子态验证、保真度估计、纠缠和量子导引目击等一系列应用，并且有可能进一步发展为构建新型量子纠错码的方法。我们从实验上设计了一个灵活的光路，可以以高精度实现一大类四量子比特态，包括所有四量子比特图态的制备和任意测量，从而帮助了“全对无”形式互文性的观测。我们希望该研究能够进一步扩展“全对无”佯谬作为互文性的一种新颖的观测手段，在量子力学基础和量子计算中的应用。

第6章 互文性与前-后选择型佯谬：量子柴郡猫交换诡笑

前两章中介绍的研究都是从非常严肃的数学工具导出互文性的一些特点，然后加以实验观测。这一章介绍一个思路与前两章迥然不同的工作，这里和第2章一样，都要请一只猫作为研究的主角。先介绍《爱丽丝漫游仙境》[160]中的角色柴郡猫 (Cheshire cat). 它有着千变万化的能力，可以随时隐去身体，只留下一个诡笑在空中漂浮：

‘All right’, said the Cat; and this time it vanished quite slowly, beginning with the end of the tail, and ending with the grin, which remained some time after the rest of it had gone.

‘Well! I’ve often seen a cat without a grin’, thought Alice, ‘but a grin without a cat! It’s the most curious thing I ever saw in my life!’

—*Alice’s Adventures in Wonderland*, by Lewis Carroll



图 6.1 柴郡猫的故事。柴郡猫是一个可以随时随地出现和消失的迷之生物。当柴郡猫消失时，只留下一个孤独的诡笑飘在空中。图片取自电影 *Alice in Wonderland*。

看到这样场面的爱丽丝难免会感到诧异。在现实生活中，即使猫会笑，这个笑也是猫的一个属性。不应该出现一个不属于猫本身的诡笑。就像在光学和量子力学中，偏振是光子的一个属性，出现一个不包含偏振的光子或者一个不依附在任何光子上的偏振都非常诡异。然而，Aharonov et al. [63] 使用包含前-后选择的量子系统，设计了一个后来被人们喜闻乐道的思想实验，导致光子的偏振跑到光子根本不存在的地方。这种前-后选择的系统中物质与其属性分离的现象，就得名量子柴郡猫现象。

量子柴郡猫的概念一经提出，就由于其反直觉的特性和奇特的预言受到广泛关注，并首先由 Denkmayr et al. [161] 使用中子干涉仪进行了实验观测。然而，对该问题研究的焦点在于使用经典光 [162] 或者单光子干涉 [163] 都能够看到类似的现象，而且可以用经典光的干涉理论完全解释看到的现象 [164]，因此该现象何以能够被称作量子柴郡猫现象，而不是“经典柴郡猫”现象，就值得商榷。发现最简态无关量子互文性证明的郁司夏老师和胡祖协老师指出 [66]，量子柴郡猫现象就是量子互文性在前-后选择下的体现，因此既然能够使用经典光或者后选择的单光子观测到互文性，就当然能够用经典光或单光子观测到量子柴郡猫现象。从另一个角度上，如果构成柴郡猫的实体不能被经典波动理论描述，那就可以创造出真正的量子柴郡猫，这正是 Das et al. [165] 的理论工作以及我们实验工作的入手点。然而，我们实验工作的另一大贡献在于，开发了基于虚时演化的弱值实部提取方法，极大地减少了弱测量的量子资源消耗。

我们关于两只量子柴郡猫隔空交换诡笑的实验工作已经由许小冶老师等撰写中文版研究亮点故事 [166]，其内容丰富，介绍详尽，因此我向仅对于柴郡猫隔空交换诡笑工作感兴趣的读者推荐直接阅读研究亮点。在本文中就不再按照构思实验的顺序来介绍该工作的内容。相反，笔者将以互文性作为支撑起理论工作的核心，以虚时演化作为实验介绍的重点。希望从这两个全新的视角讲述一个不一样的量子柴郡猫的故事。

6.1 追踪量子演化的过程

在柴郡猫的世界，人们关注的是这个魔法小精灵行进的轨迹。例如，已经知道柴郡猫今天从斯德哥尔摩前往了哥本哈根，那么要研究的是，究竟柴郡猫是从波罗的海一路前往目的地，还是从林雪平、玛尔摩辗转前往，亦或是实际上它中途绕道了大西洋对岸的安娜堡？在量子柴郡猫的世界，情况也是类似的，人们关注一个量子系统在已知初态和末态的情况下，演化过程中究竟发生了什么，如果在某处蹲守，则是否能够一睹柴郡猫的芳容。这种已知初态和末态的系统，在习惯上称为前-后选择的系统，而对它们的研究就需要使用双态矢描述的数学语言；最终，柴郡猫的踪迹则由称为弱值的量决定。

6.1.1 双态矢描述和弱值

假设一个量子系统被制备在初态 $|\psi\rangle$ ，并在末态 $|\phi\rangle$ 被测量到，我们就记该过程的双态矢描述为 $\langle\phi|\cdot|\psi\rangle$ 。在过程中量子系统的状态，将同时取决于处在其时间过去的初态 ψ 和处在其时间将来的末态 ϕ 。粗看起来，这似乎又会违反狭义相对论——未来发生的后选择决定了当前时刻的演化状态。然而要注意双态矢描述

的建立已经要求知道系统的末态，因此所有的结果都是在演化完成之后，通过后选择挑出了成功演化到了末态的一部分系综；舍弃另一部分演化失败系综的操作，改变了演化过程中可能发生的事件。因此，双态矢描述是一种对已经发生演化的逆因果推断，它为已发生的演化给出一种形象的描述。

弱值就是用来描述已发生的演化的一种数学语言，可以非常粗糙地认为一个可观测量的弱值就是该可观测量在双态矢描述的演化过程下的平均值。正式地说，可观测量 \hat{O} 在双态矢描述 $\langle\phi|\cdot|\psi\rangle$ 下的弱值 [111] 被定义为：

$$\langle\hat{O}\rangle_w = \frac{\langle\phi|\hat{O}|\psi\rangle}{\langle\phi|\psi\rangle}.$$

从操作意义上，一个算符的弱值可以被认为给出了算符与演化系统之间耦合的强度 [112]，因此，如果用一个算符将量子系统和一个指针态耦合，那么指针态在耦合期间的变化率就正比于弱值。但是，弱值有非常奇特的特点，例如厄米算符的弱值也可以是虚数，而且其取值空间远远超出算符本身的谱范围。在光学上，这个效应已经首先由 Pryde et al. [167] 等人给出展示，测出在接近正交的前-后选择下，一个光子 σ_z 的弱值高达 20 以上。何以这种性质奇异，连可观测量都不是的弱值能够与物理实在建立对应？下一节就旨在解释其中的联系。

6.1.2 一个例子：光子，你到过哪里？

由于弱值可以表征演化过程中可观测量与双态矢的耦合情况，因此当使用一个投影算符作为可观测量时，其在演化过程中某一处的弱值就代表了双态矢是否到达过这一处。其中，“到达过某处”指的是该特定的位置同时是初态和末态波函数的支撑。为了展示这个概念，下面介绍 Danan et al. [168] 的著名实验：追踪一个前-后选择的光子在 Mach-Zehnder 干涉仪中的轨迹。

首先考虑如图 6.2 所示的一个标准的 Mach-Zehnder 干涉仪，在干涉仪的两路分别加上一个振镜系统，这样通过在振镜上增加一定频率的周期性振动信号，就可以周期性地通过倾斜改变收集效率，使得探测器记录到该振动导致的功率变化。反过来考虑，如果探测器记录到一个功率变化，而其频率刚好等于某处振镜的振动频率，则说明该处的振镜对于光子有作用——也就是光子到达过这里。反之，如果功率频谱在对应于一个振镜频率处为 0，则说明光子没有到达过该振镜标记的位置。这与图 6.2 中观察到的现象符合：当将干涉仪调节到输出端刚好是最大功率时，探测器观察到功率频谱在对应两个振镜频率处都为非 0 的；当移除干涉仪最后的一个 50:50 分束器时，看到功率频谱就只剩下输入探测器一路的振镜对应的频率分量了。

现在用弱值来说明观察到的现象。我们使用简单标记的态矢和双态矢：例如 $|A\rangle$ 就表示通过 A 处的光子波函数。那么对应于面板上方的图，双态矢的初态

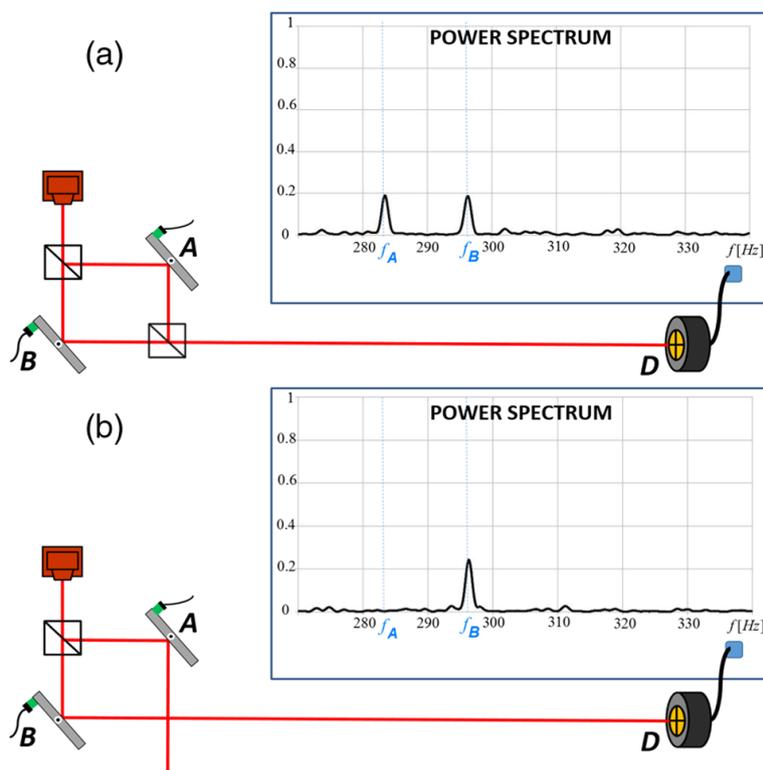


图 6.2 追踪光子的轨迹，其一。使用振镜系统可以标记光子到达的位置。从输出的功率计上读出光子同时经过了 Mach-Zehnder 干涉仪的两臂。如果去除了使得干涉仪闭合的分束器，那么只有正对探测器一路振镜的功率调制才被记录下来。图片取自参考文献 [168]。

和末态就均为 $|\psi\rangle = |\phi\rangle = (|A\rangle + |B\rangle)/\sqrt{2}$. 通过 A, B 两处的光子分别对应投影算符 $\Pi_A = |A\rangle\langle A|, \Pi_B = |B\rangle\langle B|$. 按照弱值的定义，有：

$$\langle \hat{\Pi}_A \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle \hat{\Pi}_B \rangle = \frac{1}{2}.$$

也就是每个光子总是都通过两个振镜。对应于面板下方的图，双态矢的初态和末态分别为 $|\psi\rangle = (|A\rangle + |B\rangle)/\sqrt{2}, |\phi\rangle = |B\rangle$. 此时，求得：

$$\langle \hat{\Pi}_A \rangle = 0, \quad \langle \hat{\Pi}_B \rangle = 1.$$

也就是光子不再能够经由 A 振镜到达接收端，所有到达的光子都来自于 B . 这样，我们就非常浅显地展示了弱值与光子轨迹的关系：如果弱值为 1，表示光子完全经由某处到达末态；弱值为 0 表示到达末态的光子不经过这里；弱值介于 0 和 1 之间表示光子除了经过这里之外，也通过其他路径到达末态。

接下来考虑图 6.3 中精彩的例子，在 Mach-Zehnder 干涉仪的一臂嵌套另一个 Mach-Zehnder 干涉仪。在上面板中，插入的干涉仪不起作用，两个干涉仪都

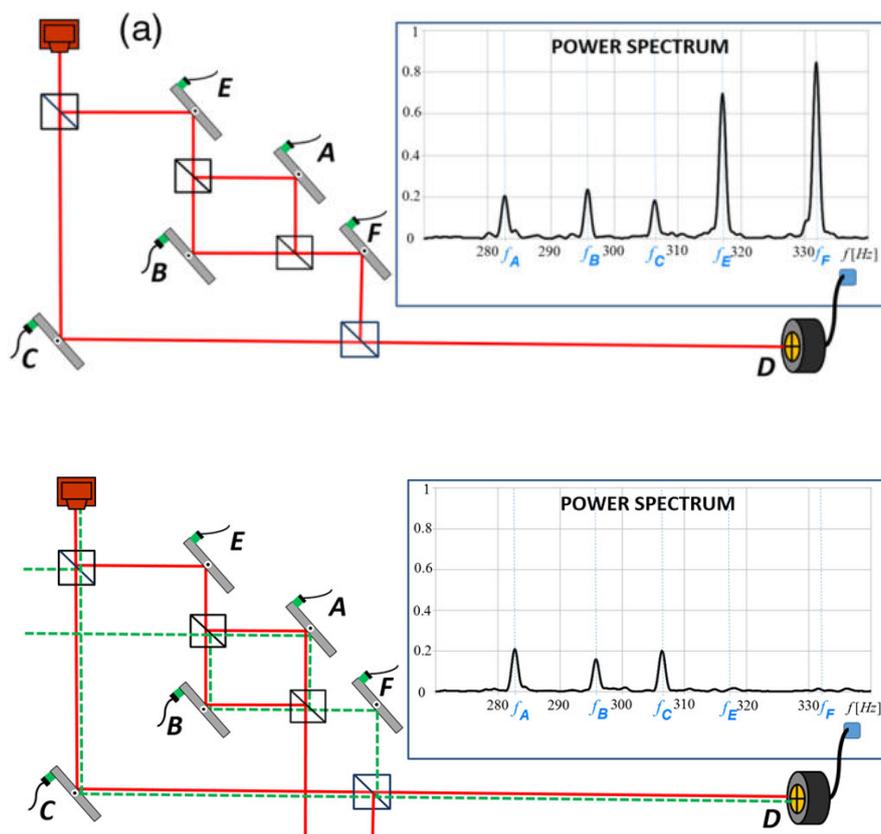


图 6.3 追踪光子的轨迹，其二。使用级联的 Mach-Zehnder 干涉仪来体现光子在干涉仪中奇特的轨迹。在下面板中，光子似乎没有经过 E, F 两处，却到达了 A, B 两处，因此，光子的轨迹不连续。图片改编自参考文献 [168]。

使得光子完全进入探测器。不出意外，我们看到所有振镜的调制再次都被记录在最终的功率频谱中。

在下面板中，干涉仪的相位设置则有所不同。与上面板相比，只调整了最内部干涉仪 A, B 两路之间的相位，使得光子完全被隔离而不再前进，从而也不再到达探测器。其它相位设置则是不变的。奇特的现象出现了：虽然此时到达探测器的光子完全来自于 C ，但是记录下来的频谱却仍然包含了来自 A, B 的贡献；更有趣的是，从初态经由 A, B 到达末态的必经之路上设置两个振镜 E, F ，直观而言如果光子到达过 A, B ，那么也必然经过 E, F ，然而这两个振镜的功率调制却没有被记录在最终的结果中。换句话说，光子凭空穿越了 E, F 两处，到达了 A, B 组成的内部干涉环。于是，构造出了一个非常反直觉的现象。

解铃还须系铃人。前-后选择系统中反直觉的现象，使用弱值语言反倒好解

释。我们对于下面板的情况再次写出光子的初态和末态：

$$\begin{cases} |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|C\rangle + \sqrt{2}|E\rangle) = \frac{1}{\sqrt{3}}(|C\rangle + |A\rangle + |B\rangle), \\ |\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|C\rangle + \sqrt{2}|F\rangle) = \frac{1}{\sqrt{3}}(|C\rangle + |A\rangle - |B\rangle). \end{cases}$$

再次代入弱值的定义，计算得到：

$$\langle \hat{\Pi}_A \rangle = 1, \quad \langle \hat{\Pi}_B \rangle = -1, \quad \langle \hat{\Pi}_C \rangle = 1, \quad \langle \hat{\Pi}_E \rangle = 0, \quad \langle \hat{\Pi}_F \rangle = 0.$$

这样，就解释了在功率谱中看到的奇怪现象：光子似乎在内部的干涉仪中“转圈”，从 A 处行进的光子对于末态的贡献被从 B 处返回初态的光子所抵消。因此，这个无起点无终点的光子没有通过 E, F 也就是合理的了。注意投影算符的谱为 $\{0, 1\}$ 二值的， $\langle \hat{\Pi}_B \rangle = -1$ 是一个奇异弱值，它落在投影算符的谱之外，因此导致了前-后选择型系统中奇妙的行为。Vaidman [169] 进一步指出，可以假设一个光子如图 6.3 中的绿色虚线所示，从探测器经过装置返回激光器，前进和返回光子交叠的区域就是实际上光子通过的区域。可以看出，这种形象的描述与弱值给出的预言是等价的。

当然，上面的解释都是双态矢描述的一家之辞，可能只有熟悉场论的读者才会对于出现一个无起点无终点的光子感到稍微习惯一些，专注量子信息的读者很可能认为该描述属于奥卡姆剃刀 (Occam's razor) 的作用范畴——“如无必要，毋增实体”。如果按照量子力学的标准描述，又应该如何理解呢？按照标准量子力学的诠释，当然是根本没有光子从 B 处返回初态，所见到的现象都是单光子干涉的结果。仍然只讨论图 6.3 下面板的情况，经由 E, F 到达探测器的光子被阻隔的原因是 A, B 两处的干涉相位使得光子离开光路，调整 E, F 处反射镜的角度不能改变内部干涉仪干涉相消的情况。因此，被记录下来的功率抖动都是由于 A, B 的调制破坏了干涉相消的条件导致的。这样，我们就从量子力学的标准描述中，恢复出了双态矢描述的结论。

从上面的讨论可以看出，双态矢描述是对于前-后选择量子系统的一个形象、方便的理解，但是决不是必须的理解。基于双态矢描述的佯谬，反映的是量子系统与经典认知、物理直觉之间的矛盾，那么接下来一个问题：它能否被提高到与之前介绍的量子力学与非互文隐变量模型之间矛盾类似的定量数学理论高度？接下来就以量子柴郡猫为例，介绍何以前-后选择型佯谬实际上就是互文佯谬。

6.2 互文性与量子柴郡猫佯谬

现在有了对于双态矢描述和弱值的介绍，我们就可以将其用于研究本章开头所提到的量子柴郡猫佯谬了。一个形象的描述如图 6.4 所示，柴郡猫和诡笑分

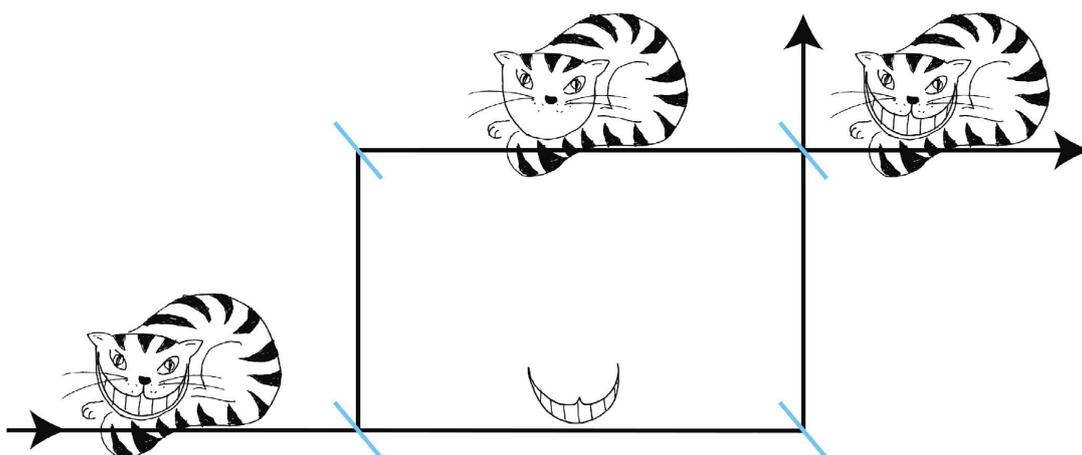


图 6.4 量子柴郡猫的概念图。在一个 Mach-Zehnder 干涉仪内，柴郡猫和诡笑分别沿着两个路径前进，导致一个凭空出现的诡笑。图片取自参考文献 [161]。

别沿着两个路径前进，导致柴郡猫完全不存在的地方，存在一个凭空出现的诡笑。先具体介绍在 Aharonov et al. [63] 的思想实验中，这个佯谬是如何实现的。此时，柴郡猫对应一个光子，而诡笑则对应光子的偏振。我们将看到，通过合适地选择前-后选择的双态矢，可以使得光子和偏振如同柴郡猫和它的诡笑一样，分离在两个不同的空间区域。

6.2.1 量子柴郡猫的笑脸去哪儿了

我们使用第 3 章中出现过的偏振-路径复合系统来表述实现量子柴郡猫效应的实验装置。我们记一个光子的状态为 $|\cdot\rangle_{\text{pol}}|\cdot\rangle_{\text{path}}$ ，其中第一个量子比特是偏振，第二个量子比特是路径，可以取 $|L\rangle$ 或 $|R\rangle$ ，代表光子在 Mach-Zehnder 干涉仪中走了哪一边。

为了实现量子柴郡猫效应，可以使用如图 6.5 所示的线性光学装置。对于前选择（态制备）部分，使用水平偏振的光子输入，其它操作的原理一望即知，制备出的量子态是：

$$|\psi\rangle = |H\rangle_{\text{pol}}(|L\rangle + |R\rangle)_{\text{path}}/\sqrt{2}.$$

对于后选择部分，实现起来稍微复杂一些。后选择的原理是选出使得探测器 D_1 响应的光子，那么这个光子在通过偏振分束棱镜前应当处于偏振状态 $|H\rangle_{\text{pol}}$ ，这样在 BS_2 前其状态就应当是 $|H\rangle_{\text{pol}}(|L\rangle + |R\rangle)_{\text{path}}/\sqrt{2}$ 。但是，在右侧一路还有一个半波片，其作用是偏振上的 σ_x 操作，因此，最终到达探测器的光子，在后选择开始处应当处于状态：

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_{\text{pol}}|L\rangle_{\text{path}} + |V\rangle_{\text{pol}}|R\rangle_{\text{path}}).$$

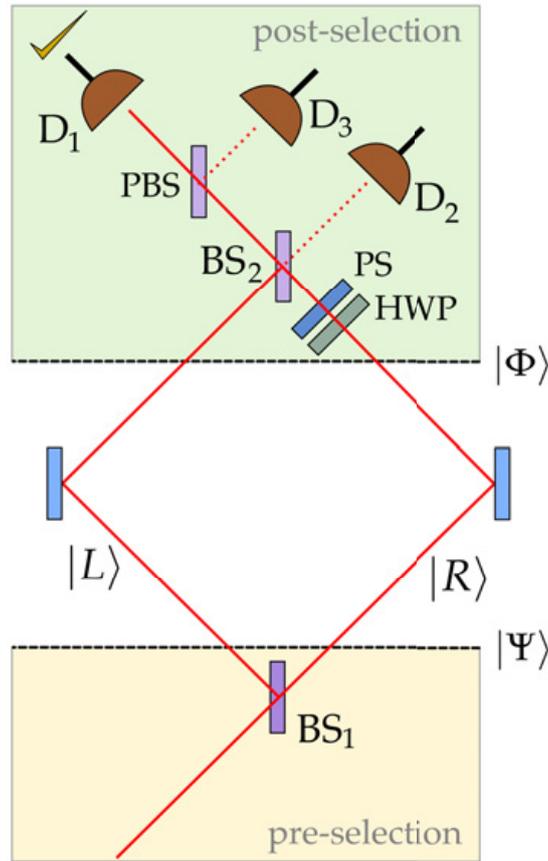


图 6.5 量子柴郡猫的思想实验装置图。在一个 Mach-Zehnder 干涉仪内，选取合适的前-后选择双态矢，使得光子和自旋分别沿着两个路径前进，形成一个不携带自旋的光子和一个凭空出现的自旋。PS: 相位调节器，HWP: 半波片，BS: 50:50 分束器，PBS: 偏振分束棱镜。图片取自参考文献 [63]。

现在我们问：在这个双态矢演化的过程中，光子和它的偏振分别走了 Mach-Zehnder 干涉仪的哪条路径？

由于是研究一个前-后选择系统，使用弱值来描述将会很方便。首先定义能够追踪量子柴郡猫（光子）和诡笑（偏振）的算符。对于光子本身，仍然使用投影算符 $\Pi_\nu = |\nu\rangle\langle\nu|, \nu \in \{L, R\}$ 。对于偏振来说，由于确定偏振的位置必须也在某个路径上进行，因此使用偏振的 Pauli 算符和投影算符的直积来表征偏振所处的位置。具体来说，此时的可观测量选取为 $\sigma_x \otimes \Pi_\nu, \nu \in \{L, R\}$ 。有了这两个算符，接下来只需代入双态矢求出弱值即可确定光子所处的位置。

首先考虑光子本身的位置，计算结果为：

$$\langle \Pi_L \rangle_w = 1, \quad \langle \Pi_R \rangle_w = 0.$$

简单地解释：到达末态的光子必定走了干涉仪的左路。

接下来考虑光子偏振的位置，计算结果为：

$$\langle \sigma_x \otimes \Pi_L \rangle_w = 0, \quad \langle \sigma_x \otimes \Pi_R \rangle_w = 1.$$

仍然可以被简单地解释为：到达末态的光子偏振 σ_x 一定来自于干涉仪的右路。但是此时反常的现象就出现了：这意味着光子和偏振在干涉仪中分开了，在干涉仪的右侧，有一个不依附在光子上的自旋，也就是一个没有柴郡猫的诡笑！

6.2.2 从 Peres–Mermin 方块中找到量子柴郡猫

上面已经使用 Aharonov 的思想实验，完整地表述了量子柴郡猫的概念，但是仅仅停留在双态矢描述和反直觉的高度。如果使用经典电磁波的干涉，而完全不借助弱值等概念，一样可以将该现象完美地解释所见到的现象。究竟量子柴郡猫现象带给了我们什么样的新知识呢？这一节中，我们将展示如何把量子柴郡猫的反直觉佯谬和非互文隐变量理论和量子力学之间的矛盾联系起来。

我们回头审视在量子柴郡猫佯谬中出现的这些变量，从它们的关系中消去柴郡猫的伪装，把它还原为一个互文性的佯谬。具体来说，就是要考虑分别对于初态和末态而言，哪些量的值是确定的。现在不考虑具体的物理系统，直接把对应偏振和路径的下标变回 1,2。因为定义两个弱值的变量要么是路径的投影算符，要么是偏振的 Pauli 算符，为了方便起见，我规定它们到计算基矢的映射为 $|H\rangle_{\text{pol}} \leftrightarrow |0\rangle_{1,2} \leftrightarrow |L\rangle_{\text{path}}$, $|V\rangle_{\text{pol}} \leftrightarrow |1\rangle_{1,2} \leftrightarrow |R\rangle_{\text{path}}$ 。这样，就可以方便地用 Pauli 算符来进行运算。对于初态而言，写出所有处于本征态的 Pauli 算符的本征值：

$$|\psi\rangle = |0\rangle(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2} : \sigma_z^{(1)}|\psi\rangle = +|\psi\rangle, \sigma_x^{(2)}|\psi\rangle = +|\psi\rangle, \sigma_z^{(1)}\sigma_x^{(2)}|\psi\rangle = +|\psi\rangle. \quad (6.1)$$

因为末态是一个 Bell 态，它不是这些算符中任何一个的本征态。这是非常合理的，因为初态和末态是某个算符的两个本征值不同的本征态，那么它们必定正交，因此投影概率为 0。然而，可以使用投影算符把这些 Pauli 算符形式的公式改写为：

$$\begin{aligned} \langle\phi|\Pi_x^{-(1)}|\psi\rangle &= 0, \\ \langle\phi|\Pi_z^{-(2)}|\psi\rangle &= 0, \\ \langle\phi|\Pi_x^{+(1)}\Pi_z^{+(2)} + \Pi_x^{-(1)}\Pi_z^{-(2)}|\psi\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

其中， $\Pi_k^\pm = (\mathbb{I}_2 \pm \sigma_k)/2$ 。这些算符就是 Peres–Mermin 方块的第一行（见图 2.2）。这说明，对于到达末态的这一部分光子，下面三个表述都成立：

- 光子的偏振必定为 $\sigma_x = +1$ 。
- 光子必定来自于左路 $|L\rangle$ 。
- 光子的偏振与路径是“反关联”的：如果光子来自左路 $|L\rangle$ ，那么偏振必定为 $\sigma_x = -1$ ；如果偏振为 $\sigma_x = +1$ ，那么光子必定来自于右路 $|R\rangle$ 。

但是，我们马上就可以看出当偏振依附在光子上时，三个表述是矛盾的：不可能有一种偏振和路径的状态同时满足三个要求。量子柴郡猫佯谬就是这三个表述的一种妥协——把偏振认为可以独立于光子存在，以一种反直觉的方式，使得公式 (6.2) 中所有的预言能够兼容。

从互文性的角度上来说，公式 (6.2) 非常清晰地体现了量子力学与非互文隐变量理论的矛盾。如果用一个非互文隐变量理论来描述，那么对于二值测量 Π_k^\pm 的结果必居两者之一，也就是响应函数必满足 $v(\Pi_k^+) + v(\Pi_k^-) = 1$ 。按照非互文隐变量理论的描述，

$$\begin{aligned} \langle \phi | \Pi_x^-(1) | \psi \rangle &= v(\Pi_x^-(1)) \langle \phi | \psi \rangle = 0 \Rightarrow v(\Pi_x^-(1)) \equiv 0, \\ \langle \phi | \Pi_z^-(2) | \psi \rangle &= v(\Pi_z^-(2)) \langle \phi | \psi \rangle = 0 \Rightarrow v(\Pi_z^-(2)) \equiv 0, \end{aligned} \quad (6.3)$$

必有与弱值中的可观测量对偶的另外两个算符的响应函数 $v(\Pi_x^+(1)), v(\Pi_z^+(2))$ 恒为 1，但是，这就意味着：

$$\langle \phi | \Pi_x^+(1) \Pi_x^+(2) | \psi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0,$$

与公式 (6.2) 的最后一个结论矛盾。从而我们已经将量子柴郡猫佯谬转化成了 Peres–Mermin 方块中一个态依赖的“全对无”型互文佯谬。

6.2.3 “量子”柴郡猫？

前面已经提到，完全可以使用经典电磁波的理论再现量子柴郡猫实验中所有可观测的预言。在图 6.6 中，Atherton et al. [162] 提供一个精彩的例子。他们使用激光代替单个量子物体进行实验，也观察到激光与其偏振“分离”的现象。他们的测量原理是使用中性滤光片和波片分别改变光束的强度和偏振，若在某个

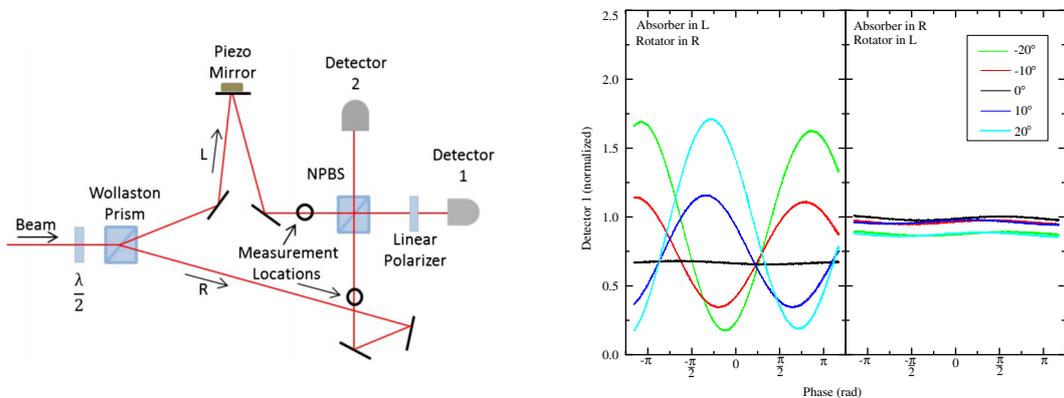


图 6.6 观察“经典”柴郡猫的实验。左图为实验装置，右图为实验结果。当在干涉仪左侧衰减激光强度或在右侧改变光束偏振时，对收集端功率有影响，反之没有影响。图片取自参考文献 [162]。

路径中的改变对于最后探测的功率没有影响，则说明激光或其偏振没有通过该位置。实验结果表明，到达探测器的激光全部来自左路，到达探测器的偏振则全部来自右路。

对于“经典”柴郡猫的实验研究实际上对于不管是弱值还是互文性的量子特性都具有深刻的意义。应该指出，弱值只是一种语言，是一种对包含前-后选择物理现象的描述方法；它不是一个物理量，更不是量子力学的一个内禀特征。对于包含前-后选择的经典系统，完全也可以类似地定义弱值并观测到奇异的效应 [170]；甚至在该实验中使用的观测方法，也可以被我们在第3章中介绍的虚时演化的体系所描述。“经典”柴郡猫的案例很好地体现出，只要两个体系受到相同的数学定律所支配，它们当然就应该表现出相同的行为。另一方面，要构造一个真正的“量子”柴郡猫实验，就需要至少使用一个不存在经典对应的实验步骤。一个思路是针对测量过程，使用双光子干涉进行弱测量，该技术被 Kim et al. [171] 实现；另一个思路是针对制备过程，使用两个纠缠的柴郡猫组构成一个没有经典描述的量子系统，这就是我们工作的理论思路。

6.3 量子柴郡猫的诡笑交换

构造一个无经典对应的，真正的量子柴郡猫实验，有多个明显的动机。从理论上来说，多个量子客体和其属性的分离可能能够造成更为奇特的现象，例如如果能够凭空交换两个粒子的属性，就比纠缠交换 [172] 还要有更强的作用；量子客体从其他客体处获得本身不存在的属性也带有强烈的反直觉色彩。从实验上来说，要观察这种多个量子与其属性分离和彼此交换的现象富有技术挑战，推动着新技术的形成。从应用上来说，取得分离多个客体属性的能力有助于实现噪声免疫的通信。例如如果将光子的波粒二象性分离 [173]，可能两种属性就能分别获得对于相位噪声和强度噪声的鲁棒性。下面，我就展示我们从 Das et al. [165] 等人的理论工作基础上发展起来的，实现量子柴郡猫诡笑交换的实验方案和结果。

6.3.1 可观测量和前-后选择态的构造

从一个漫画的概念图出发介绍实验的设计。如图 6.7 所示，两只量子柴郡猫分别可以选择从上路和下路（记为 $u=up$ 和 $d=down$ ）进入一个单向通道。作为柴郡猫，他们喜爱将诡笑和自身分离，各选择一个通道进入装置。然而，代价是当离开装置时，回到自身的变成了另一只柴郡猫的诡笑。这是因为在离开了通过弱值表征它们诡笑分离现象的区域之后，包含每只柴郡猫诡笑的一路都被引向了另一只柴郡猫。

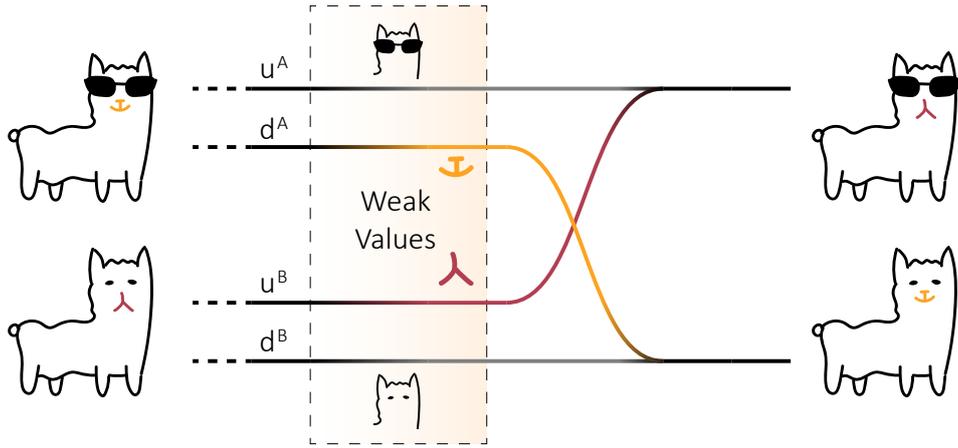


图 6.7 量子柴郡猫交换诡笑的漫画原理图。两只柴郡猫都进入两进一出的单向通道，但是他们的诡笑均被分开并导向另一只猫，导致最终两只柴郡猫交换了诡笑。诡笑与本体分离的现象可以通过弱值来进行目击。

现在我展示如何通过选择合适的可观测量和前后选择态，使得上面的童话故事^①能够在物理系统中实现。我们仍然使用一个光子偏振-路径的复合系统 $|\cdot\rangle_{\text{pol}}|\cdot\rangle_{\text{path}}$ 来表征两只柴郡猫的状态。这样，光子位置的可观测量就是 $\langle \mathbb{I}_2 \otimes \Pi_\mu^v \rangle$, $\mu \in \{u, d\}$, $v \in \{A, B\}$ ——它表示光子 v 处在路径 μ 上；光子偏振的可观测量取为 $\langle \sigma_z \otimes \Pi_\mu^v \rangle$, $\mu \in \{u, d\}$, $v \in \{A, B\}$ ——它表示光子 v 的偏振 σ_z 处在路径 μ 上。物理基矢与计算基矢的对应关系为： $|H\rangle_{\text{pol}} \leftrightarrow |0\rangle_{1,2,3,4} \leftrightarrow |u\rangle_{\text{path}}$, $|V\rangle_{\text{pol}} \leftrightarrow |1\rangle_{1,2,3,4} \leftrightarrow |d\rangle_{\text{path}}$ 。我们的装置需要实现两个功能：其一是将两只柴郡猫的诡笑都与自身分开，其二是实现交换过程，使得每只柴郡猫与先前不属于自身的诡笑融合。对于第一个目的来说，我们选取前-后选择态表示为 $|\cdot\rangle_{\text{pol}1}|\cdot\rangle_{\text{pol}2}|\cdot\rangle_{\text{path}1}|\cdot\rangle_{\text{path}2}$ 的形式，分别为：

$$\begin{aligned} |\xi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [-|\Phi^-\rangle \otimes |u^A d^B\rangle + |\Phi^+\rangle \otimes |d^A u^B\rangle], \\ |\zeta\rangle &= |D\rangle^{\otimes 2} \otimes |\Psi^-\rangle. \end{aligned} \quad (6.4)$$

其中，偏振的叠加态 $|D\rangle = (|H\rangle + |V\rangle)/\sqrt{2}$ 。如果把物理基矢换成计算基矢，就会发现前选择态就是第 5 章中的 4 量子比特线性簇态。代入弱值的定义式，就得到：

$$\begin{aligned} \langle \Pi_\mu^v \rangle_w &= \delta_{\mu d} \delta_{v A} + \delta_{\mu u} \delta_{v B}, \\ \langle \sigma_z^v \otimes \Pi_\mu^v \rangle_w &= \delta_{\mu u} \delta_{v A} + \delta_{\mu d} \delta_{v B}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

这样，与公式 (6.2) 中的情况类似，实现了两个位置算符与两个偏振算符之间弱值的反关联。

^①图中的柴郡猫并非羊驼。当然，柴郡猫到底为何物，仍以读者的理解为准。

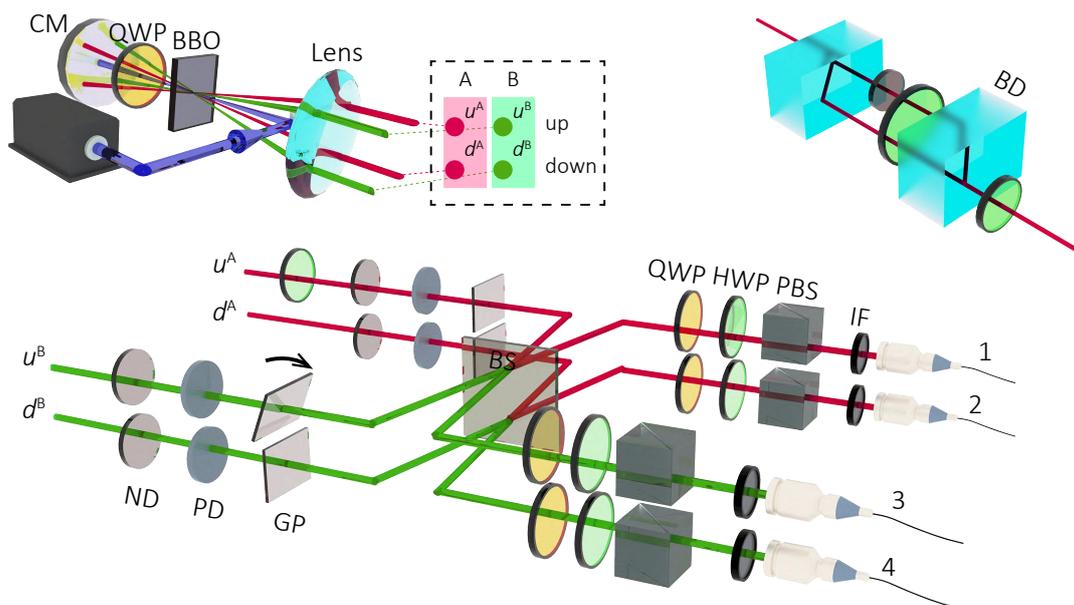


图 6.8 量子柴郡猫交换诡笑的实验装置。左上图：实验使用的超纠缠光源，产生偏振和路径都处于最大纠缠态的光子对。右上图：可调谐偏振滤光片的原理，由两个光束偏移器，两个波片和一个可调谐中性滤光片构成。作用是衰减竖直偏振光子的波函数振幅。下图：弱值提取和后选择装置。使用可调谐中性滤光片和偏振滤光片得到所需的弱值，而后偏振-路径联合测量结合符合探测完成后选择。ND: 可调谐中性滤光片，PD: 可调谐偏振滤光片，BD: 光束偏移器，QWP: 四分之一波片，HWP: 半波片，PBS: 偏振分束棱镜，IF: 干涉滤光片。

对于第二个目的来说，就需要在实验装置上动一些脑筋。我们的实验装置如图 6.8 所示，现在只需要关注下方的面板。在完成弱值的分析后，我们对公式 (6.4) 分别进行偏振和路径的两步后选择，但是路径的后选择是使用双光子干涉完成的：使得每个光子所在的路径与另一个光子自旋所在的路径在一个 50:50 分束器上干涉，然后在单光子计数器 {1, 4} 之间进行符合探测。这个操作的效果是收集路径量子比特的单态 $|\Psi^-\rangle = |u^A d^B\rangle - |d^A u^B\rangle / \sqrt{2}$ ，而舍弃掉三个三重态：对于 $|\Phi^\pm\rangle$ 来说，分束器上会出现 Hong-Ou-Mandel 干涉，导致光子跑到同一个探测器里；对于 $|\Psi^+\rangle$ 来说，额外的 π 相位会导致两个光子跑到同一侧的两层探测器中，具体的原理仍然可由二次量子化下产生算符的演化算得。按照公式 (6.5) 的要求，两只柴郡猫由于量子纠缠的原因，必定分居上下两层；两个诡笑也分居上下两层，而且分布与柴郡猫是相反的。最后探测时，每层接收到一个完整的光子，它必定是来自该层的柴郡猫和原先属于处于另一层的柴郡猫的诡笑叠加而来。这样，我们就使用符合探测技术同时实现了后选择和交换过程。

简单补充一下关于实验中使用的量子光源的介绍，如图 6.8 左上面板所示，

它与我们之前使用的所有光源都不同，是使用连续的紫外激光往返泵浦一个 I 型非线性晶体得到的 [174]。这种光源每泵浦一次产生两个偏振相同的光子，两次泵浦之间使用一个参量光波长的四分之一波片把第一次泵浦时产生的光子偏振转了 90 度，因此最后得到的光子偏振态形式是 $|\Phi^+\rangle = (|HH\rangle + |VV\rangle)/\sqrt{2}$ 。然而其最大的特点是会产生一个环状的参量光子输出区域，因此参量光子对可以分布在环的任意一对对称位置；只要选出两对分布在矩形四个顶点上的接收位置，那么光子就总会成对地出现在对称的顶点，因此最后得到的光子路径态形式是 $|\Psi^+\rangle = (|u^A d^B\rangle + |d^A u^B\rangle)/\sqrt{2}$ 。总的来说，该光源得到了一个偏振和路径各自最大纠缠的超纠缠态；再在输出光路的一路加入一个放置在 0 度的半波片，就等于进行了一个 CZ 操作，形成一个 4 量子比特线性簇态。

为什么需要使用这个往返泵浦的光源，而不是第 5 章中已有的光路来生成线性簇态？答案是因为那个光路中线性簇态的制备已经使用过双光子干涉了，再次使用会导致首次门操作依赖的符合探测失效。而这里的装置只使用波函数的空间全同性来制备纠缠 [175]，生成的两个光子能够在末态进行 Bell 态测量，这对于我们的后选择而言是必须的。因此，使用这种依赖光子全同性往返泵浦的光源是进行本实验的必然选择。

6.3.2 不依赖弱测量的弱值提取

万事俱备，只欠东风。有了前后选择的双态矢和实验装置，量子柴郡猫实际上已经开始在光路中进行诡笑交换了。然而，如何对这种效应进行观测呢？如果按照 Pryde et al. [167] 或者 Kim et al. [171] 等人的方法，使用 CNOT/CZ 门进行弱测量的话，至少还需要一个光子，但是连续光激光器的参量下转换过程每次只能获得一对光子；如果换成脉冲光泵浦，光源处就需要增加额外的补偿来保证两次参量过程产生光子的波函数时间重合。加上 CZ 门本身对虚时演化参数较高的依赖，对于实验的资源 and 精度要求过高。因此，我们考虑使用一个替代受控门操作的方法实现弱值提取。

前面第 3 章中，笔者已经推导出虚时演化在 $t \rightarrow 0^+$ 时，造成的后选择概率变化和哈密顿量以及演化时间之间的关系。为了行文的完整性，再次写出公式 (3.9)：

$$\frac{d}{dt} \frac{\Pr[\phi|\psi(t)]}{\Pr[\phi|\psi(0)]} = 2\text{Re}\langle H \rangle_w := 2\text{Re} \frac{\langle \phi|H|\psi \rangle}{\langle \phi|\psi \rangle}. \quad (6.6)$$

翻译为不使用公式的语言：虚时演化导致归一化后选择概率对于演化时间的导数，二倍于虚时演化哈密顿量弱值的实部。由于观测量子柴郡猫时，用到的弱值都是只有实部，因此虚时演化法特别适合应用于我们的工作。为了排除弱值虚部，只需在后面验证前-后选择双态矢都不包含虚部即可。

现在我们以路径和偏振位置两种可观测量分别作为哈密顿量，求出所需虚时演化的形式。对于路径算符来说，

$$U_{\mu,\text{path}}^{\nu}(\ell_n) = \exp(-\Pi_{\mu}^{\nu}\ell_n) = \mathbb{I}_2 - \Pi_{\mu}^{\nu} [1 - \exp(-\ell_n)],$$

意思是将光子 ν 在路径 μ 上的振幅衰减到原先的 $\exp(-\ell_n)$. 在实验上，这可以通过在光子的路径上加入一个可调谐中性滤光片来实现，其透过率为 $\gamma_n = \exp(-2\ell_n)$. 要求解偏振弱值，情况稍微有些不同。如果直接用偏振算符生成虚时演化，我们将得到：

$$\tilde{U}_{\mu,\text{pol}}^{\nu}(\ell_p) = \exp(-\sigma_z^{\nu} \otimes \Pi_{\mu}^{\nu}\ell_p) = (\mathbb{I}_2 - \Pi_{\mu}^{\nu}) + \Pi_{\mu}^{\nu} [\cosh(\ell_p) - \sigma_z^{\nu} \sinh(\ell_p)],$$

而方括号中的两项都需要进行一个概率幅放大的操作，因此在线性光学中是做不到的。但是，我们另辟蹊径，再次使用投影算符和 Pauli 算符之间相互变换的技巧，选取 $(\mathbb{I}_2 - \sigma_z)^{\nu} \otimes \Pi_{\mu}^{\nu}/2$ 来生成这个虚时演化。此时，由于算符的谱已经全部为非负数，虚时演化就可以完全使用衰减来完成：

$$\begin{aligned} U_{\mu,\text{pol}}^{\nu}(\ell_p) &= \exp(-\Pi_{\mu}^{\nu}\ell_p) = \mathbb{I}_2 - \Pi_{\mu}^{\nu}(1 - \sigma_z)^{\nu} [1 - \exp(-\ell_p)] / 2 \\ &= \mathbb{I}_2 - |V\rangle\langle V|_{\text{pol}} \Pi_{\mu}^{\nu} [1 - \exp(-\ell_p)], \end{aligned}$$

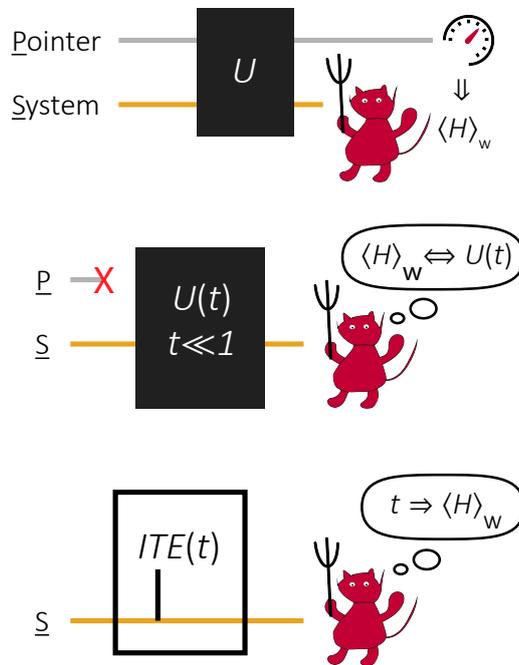


图 6.9 不依赖弱测量的弱值提取。标准的弱测量中，使用指针态的改变读出弱值。我们和 Dressel et al. [112] 证明，不使用指针态，但是允许记录后选择概率的变化，也能等效地求出造成概率变化的哈密顿量对应的弱值。在本工作中，使用不同演化时间的虚时演化，对后选择概率和演化时间做线性拟合，以求出弱值的实部。

意思是将光子 ν 在路径 μ 上垂直偏振部分的振幅衰减到原先的 $\exp(-\mathcal{L}'_n)$. 在实验上, 这可以通过在光子的路径上加入一个可调谐偏振滤光片来实现, 其使得水平偏振的光子完全通过, 而对垂直偏振光子的透过率为 $\gamma_p = \exp(-2\mathcal{L}'_p)$. 可调谐偏振滤光片实际上是使用两个光束偏移器加上可调谐中性滤光片来组成的, 它以非常直观的原理衰减掉光子中垂直偏振的分量。

有了上面定义的虚时演化操作和它们在实验上实现的方法, 就可以通过微扰法求解弱值了. 将上面的可观测量、演化强度和计数率变化的关系代入公式 (6.6):

$$\langle \Pi_\mu^\nu \rangle_w = -\frac{1}{2} \frac{dN_{\mu,n}^\nu}{d\mathcal{L}'_n}, \quad (6.7)$$

$$\langle \sigma_z^\nu \otimes \Pi_\mu^\nu \rangle_w = -\frac{1}{2} \frac{dN_{\mu,n}^\nu}{d\mathcal{L}'_n} + \frac{dN_{\mu,p}^\nu}{d\mathcal{L}'_p}. \quad (6.8)$$

到此为止, 我们已经把弱值的测量问题转化为了符合计数率对于光路中衰减操作的响应问题. 这样, 观测量量子柴郡猫交换诡笑的所有工具都已经具备, 接下来正式介绍实验的过程。

6.3.3 实验实现

在正式观察量子柴郡猫交换诡笑之前, 我们首先检查实验中初态的前选择和末态的后选择情况, 用于说明实验中的双态矢描述符合理论要求. 对于前选择, 方法是暂时先移除 50:50 分束器, 这样就可以分别使用量子态层析分析初态

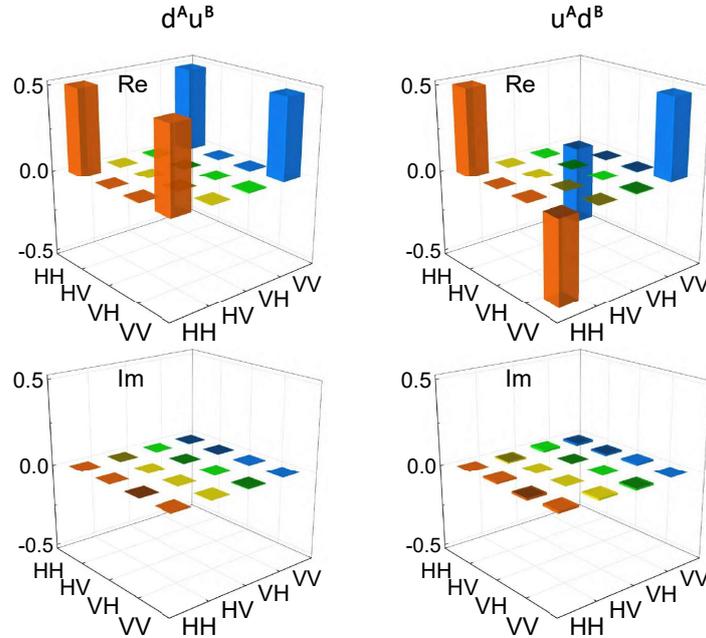


图 6.10 量子柴郡猫交换诡笑的初态制备. 左右两图分别对应 $|u^A d^B\rangle$ 和 $|d^A u^B\rangle$ 两个路径上偏振态的量子态层析结果。

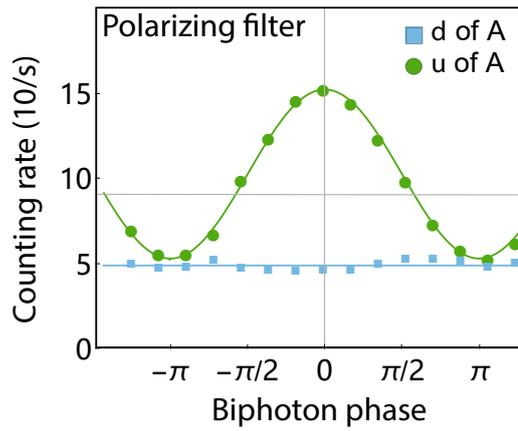


图 6.11 量子柴郡猫交换诡笑的测量校准。通过在光路中加入可调谐偏振滤光片，可以精确地测量双光子干涉的相位，再通过倾斜预先放置在光路中的玻璃片角度，就可以将相位调整到后选择态所要求的位置。

中对应 $|u^A d^B\rangle$ 和 $|d^A u^B\rangle$ 两个路径组合的偏振状态，按照公式 (6.4) 要求，它们分别应该为 $|\Phi^+\rangle$ 和 $|\Phi^-\rangle$ 。实验结果如图 6.10 所示，在两个路径上测到的量子态与目标态保真度分别高达 99.0% 和 99.2%，充分说明了态制备极高的精度。

为了检查后选择的执行情况，主要就是校准双光子干涉时的相位，我们在干涉仪中对应其中一个光子的路径上加一个 $t_p = O(1)$ 的可调谐偏振滤光片，然后调节干涉仪中的玻璃片角度，从而优化后选择时路径态向 $|\Psi^-\rangle$ 的投影精度。理论计算结果表明，此时若将可调谐偏振滤光片放置在有自旋 σ_z 通过的一路时，将使得符合测量计数率增大，而放在没有自旋通过的一路时将使得符合测量计数率减小。因此，我们将可调谐偏振滤光片放置在有自旋 σ_z 通过的一路，并且扫描玻璃片的角度，使得符合计数率最大，从而实现符合理论预期的后选择。对于整个角度区间，我们都记录符合计数率，并与理论预言进行拟合。结果如图 6.11 所示，在两路放置可调谐偏振滤光片后，符合计数率的变化都与理论预期符合得很好，说明我们实验中进行的后选择操作是可信的。

当所有准备工作都完成之后，对于量子柴郡猫交换诡笑的实验观测就可以顺畅地进行。我们通过调整光路中所添加的可调谐中性滤光片和可调谐偏振滤光片的位置和透过率，再使用公式 (6.8) 进行线性拟合，就可以从符合计数率的变化中计算出所有待求可观测量的弱值，从而展示两只量子柴郡猫都与自身的诡笑分离的状态。我们的实验结果如图 6.12 所示，计算得到所有所需的弱值为：

$$\begin{aligned} \langle \Pi_u^A \rangle_w &= -0.01(3), \quad \langle \Pi_d^A \rangle_w = 1.04(4), \quad \langle \Pi_u^B \rangle_w = 1.11(4), \quad \langle \Pi_d^B \rangle_w = 0.06(4), \\ \langle \sigma_u^A \rangle_w &= 1.01(3), \quad \langle \sigma_d^A \rangle_w = -0.04(4), \quad \langle \sigma_u^B \rangle_w = 0.10(2), \quad \langle \sigma_d^B \rangle_w = 0.04(3). \end{aligned}$$

其中，使用括号标出小数点后最后一位的不确定度。这个不确定度就是使用泊

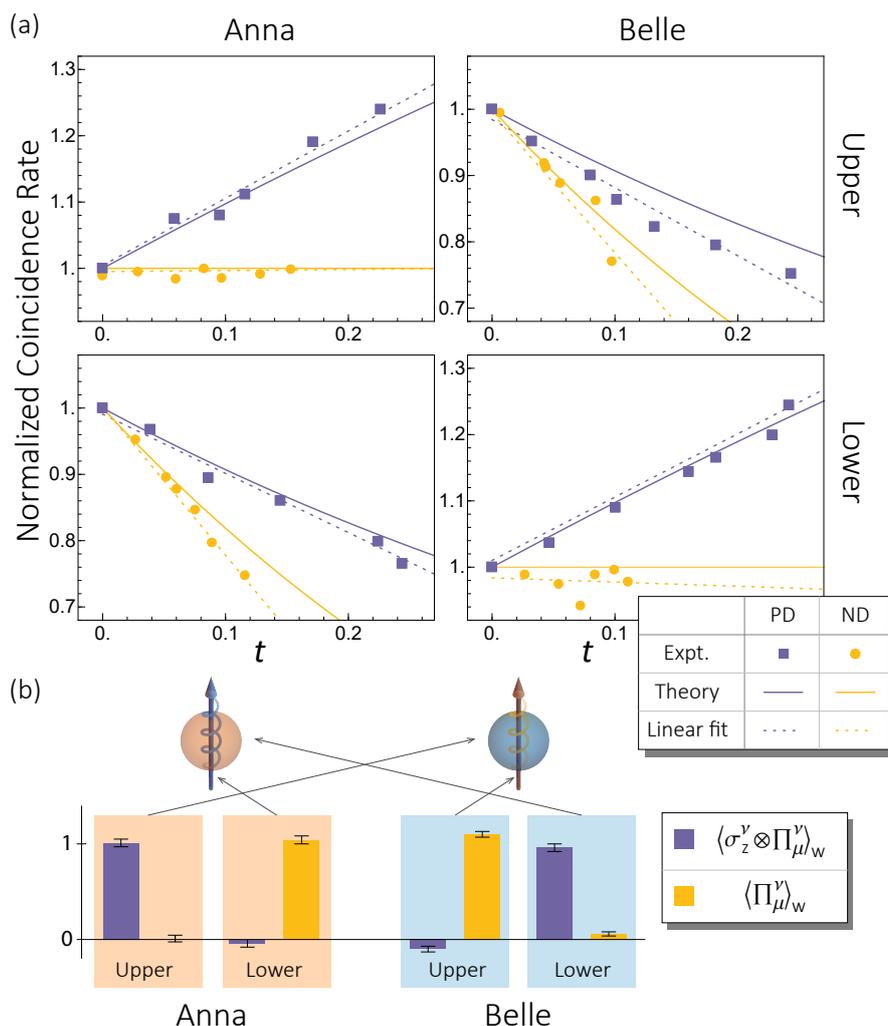


图 6.12 量子柴郡猫交换诡笑的实验结果。上图中给出归一化符合计数率随着加入的可调谐滤光片的种类、透过率和放置位置的变化情况，ND 和 PD 分别代表加入中性滤光片和偏振滤光片的结果。下图表示线性拟合后得到的弱值，以及根据这些弱值观测到的两个光子隔空交换自旋的形象结果。

松计数统计将所有实验数据重新采样 100 次后再拟合，计算出的弱值的 1σ 标准差。它们与公式 (6.5) 的预言取得良好的符合。

在图 6.12 中，笔者给出一种对于实验结果的形象理解。可以看到，按照计算出来的弱值，每个最后被探测到的光子都是由先前一个制备出来光子的本体和另一个光子的偏振所组合而成——紫色的光子带上了金色的偏振，金色的光子带上了紫色的偏振。到这里，我们就已经完成了对两只量子柴郡猫各自得到另一只柴郡猫的诡笑这一奇妙现象的观测。使用高阶量子干涉的手段，我们找到了一个没有经典对应，仅仅出现在量子世界中的柴郡猫佯谬。实验中展示的属性分离现象，还能够一定程度上免疫环境特定形式的噪声影响，使得柴郡猫与属性的分离具有较强的鲁棒性。

6.4 小结

量子柴郡猫交换诡笑的实验完成后，有幸受到了学术界和媒体的广泛关注。不少读者对于故事的背景，以及类似“到底两个光子为什么可以隔空交换偏振属性？”的问题充满好奇。藉撰写本文的机会，我强调：量子柴郡猫交换诡笑是一个互文性佯谬，是对于人类直觉和符合人类直觉的非互文隐变量理论的一种挑战。佯谬这个词意味着它不是一个对未知物理世界的新发现，而是发现了两个已有规律之间的矛盾，并且迫使人们在其中做出选择，至少抛弃一个。我们在实验中观测到的交换是交换了携带在偏振自由度上的量子信息，我们还做不到交换例如质量、电荷之类的物质属性本身——我们也不知道如何对于非全同粒子实现不同属性之间的交换、甚至叠加！然而，尽管好的科学工作需要好的背景故事来包装，不能复现背景故事中的每一个细节却并不妨碍一项研究成为一个有意义的工作。我们在研究中发展的基于虚时演化的弱值测量技术，将能够在非常广泛的场景中取得应用，大大节约量子测量任务所需的资源。我们对于“经典”柴郡猫的讨论说明：只要两个体系受到相同的数学定律所支配，它们就应该表现出相同的行为。这个思想催生了量子模拟 [176] 这一新兴研究方向，它在近年来取得了极大的发展。在下面的第7章中，笔者就将继续展示我们使用量子模拟的工具，在线性光学系统中实现的对于拓扑系统的等效研究。

第7章 拓扑保护的互文性：仲费米子的量子模拟

前面几章讨论的基础都是各种量子比特或者高维量子比特。这一章我们转而考虑一个全新的系统——任意子体系。在拓扑系统中，存在一些称为非阿贝尔 (non-abelian^①) 任意子的激发模式。和固体振动模式被称为声子一样，我们常常将其当成一种准粒子。对于这个系统的研究兴趣来自于可以将量子信息编码在非定域的量子关联中，而这种编码受到拓扑保护，原则上可以指数正比于拓扑系统规模地免疫任何局域噪声 [177-179]。此外，这种系统的非阿贝尔统计特征 [180] 使得两个粒子交换时，系统波函数既不像玻色子系统那样不变，也不像费米子系统那样得到一个 π 相位，而是在编码空间中出现一个幺正演化，从而可以用编织——准粒子之间的位置交换——操作来构造量子门操作。这些性质使得拓扑量子计算成为了实现容错量子计算的一种有吸引力的方法。

马约拉纳费米子 (Majorana fermion) 的边缘零能量模式（也常被称为马约拉纳束缚态，但我们在本文中将其简称为马约拉纳零模）是非阿贝尔任意子最广为人知的例子。虽然有一些实验特征支持马约拉纳零模的存在^②，然而这些系统中的非阿贝尔统计性质仍然难以被观测到。实现马约拉纳费米子的编织，一个最重要的障碍就是这些系统受到环境中泄漏出来的准粒子的污染，这种机制被称为准粒子中毒 [181]。这种机制极大地减少以马约拉纳零模编码的量子态的相干时间，从而为实现基于马约拉纳零模的拓扑量子计算带来了重大挑战。

7.1 从仲费米子到光量子模拟

为了克服马约拉纳费米子的上述缺点，有些科学家提出使用其它性质更奇异的非阿贝尔任意子来编码量子信息。其中一个具有代表性非阿贝尔任意子就是仲费米子 (parafermion)。它具有 Z_n 对称性 (n 为正整数)，是具有 Z_2 对称性的马约拉纳费米子的自然扩展。Fendley [182] 首先指出，仲费米子提供对称保护的 n 重简并基态，可用于编码 n -维量子比特。有趣的是，由于在超导体量子 Hall 系统中存在一对仲费米子组成的复合拓扑荷 [183-184]，在基于仲费米子的量子计算中，准粒子中毒可以被有效抑制 [185]。与马约拉纳零模类似，仲费米子的编织操作只能产生 Clifford 算符对应的演化，因此无法独立地用编织操作实现通用量子计算。然而，人们已经提出了各种方法来使用仲费米子实现通用量子计

^①科学家能够得到的最高荣誉：自己的名字成为首字母无需大写的专有名词。

^②让我们在本文中假定拓扑量子计算最终是可以实现的。或者，至少是可以实现量子比特从 0 到 1 的突破的。

算。一个代表性的方式就是已经在前面提到的，使用魔术态萃取 [84] 渐近地构成 non-Clifford 门，例如 $\pi/8$ -相位门。为了确定是否可以使用魔法状态蒸馏，可以使用量子互文性作为判据，对通用量子计算的资源适用性进行测试 [22]。

通过操纵分数量子 Hall 态，原则上可以实现对于仲费米子的研究。然而，这种方案实现起来在技术上极具挑战，直到 2020 年才观察到任意子存在的迹象 [186-187]。另一方面，量子模拟 [188-189] 在演示任意子系统的性质方面已经取得了一系列成果，例如演示任意子的编织效应 [106, 190] 和李传锋、许金时老师课题组对基于马约拉纳零模量子门的光学模拟 [107]。在本章中，笔者将介绍我们用光量子模拟来研究基于 \mathbb{Z}_3 仲费米子的通用量子计算的两个关键要素：

1. 生成 Clifford 门的编织操作；以及
2. 作为 non-Clifford 门实现资源的拓扑保护的量子互文。

由于我们的光量子模拟器具有极长的相干时间，同时能够实现精确的门操作，因此非常适合用于观测决定任意子统计性质的 Berry 相位。我们使用光束偏移器网络编码仲费米子状态。我们将展示由于仲费米子的拓扑保护特征，它们的操作对于门操作中出现的局域噪声具有鲁棒性。由于单光子有限的可扩展性，在光束偏移器网络中对仲费米子的编码无法使用直积形式进行扩展，因此能够实现的希尔伯特空间的大小仅随着所使用的空间模式数资源呈多项式增加。然而，最近已经可以通过空间光调制 [137] 和波前传感 [119] 来同时操控和测量数个空间模式，这大大扩展了实现大规模光量子模拟的前景。我们希望这种光子模拟将在不久的将来能够展现拓扑量子算法。

7.1.1 仲费米子的数学描述

先介绍马约拉纳费米子，它们作为零模出现在耦合系数适当的费米子一维链的末端 [178]。使用 Jordan–Wigner 变换，可以将一个费米子链映射成一个自旋 1/2 粒子链。Jordan–Wigner 变换的数学形式如下：

$$\begin{aligned} \gamma_{ka} &= \sigma_{z,k} \prod_{j<k} \sigma_{x,j}, \\ \gamma_{kb} &= \sigma_{z,k} \prod_{j<k} \sigma_{x,j}. \end{aligned}$$

其中 γ_{km} 是对应第 k 个粒子上马约拉纳模式 $m = a, b$ 的产生算符，它同时也是湮灭算符。Jordan–Wigner 变换是一个非定域变换，一个费米子模式的状态将被映射到其一侧的所有自旋 1/2 粒子的状态上。由于该特点，映射前的费米子系统的局部性质与映射后得到的自旋 1/2 系统的局部性质截然不同：费米子系统中的局域噪声不再局限于自旋系统中的一个位置，导致费米子系统中拓扑保护的特点在自旋系统中不复存在。然而，Jordan–Wigner 变换保持变换前后费米子算符的

谱不变，因此交换操作和探测到的几何位相保持不变。

类似于马约拉纳系统的研究方式，我们研究 \mathbb{Z}_n 仲费米子系统和自旋数更高的自旋体系的数学对应，但是逻辑方向是相反的——考虑如何从自旋链中获取仲费米子。这里使用的数学语言叫 Fradkin–Kadanoff 变换 [191]。我们首先定义平移算符 τ 和钟表算符 σ ，它们分别是 Pauli 算符 σ_x 和 σ_z 在高维下的推广：

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega^{n-1} \end{pmatrix},$$

$$\text{其中, } \omega = e^{2\pi i/n}. \quad (7.1)$$

这两个算符的对易关系是 $\sigma\tau = \omega\tau\sigma$ 。这样，与 Jordan–Wigner 变换类似，我们定义第 k 个仲费米子的两个模式 a, b 的湮灭算符 α_{ka}, α_{kb} 分别为：

$$\alpha_{ka} = \sigma_k \prod_{j < k} \tau_j, \quad (7.2)$$

$$\alpha_{kb} = \sigma_k \prod_{j \leq k} \tau_j. \quad (7.3)$$

注意，对于 $n \neq 2$ 的仲费米子而言，产生和湮灭算符不再是简并的。对应地，仲费米子算符映射到自旋算符的逆变换形式是：

$$\begin{aligned} \tau_k &= \alpha_{ka}^\dagger \alpha_{kb}, \\ \sigma_k &= \alpha_{ka} \prod_{j < k} \alpha_{jb}^\dagger \alpha_{ja}. \end{aligned}$$

7.1.2 仲费米子的编织操作

在本工作中，我们考虑一个由 3 对 \mathbb{Z}_3 仲费米子组成的一维链，每一对仲费米子包含两个 \mathbb{Z}_3 的仲费米子模式 (α_{ja} 和 α_{jb})，它们满足对易关系 $\alpha_{ja}\alpha_{ka} = \omega\alpha_{ka}\alpha_{ja}$ ， $\alpha_{jb}\alpha_{kb} = \omega\alpha_{kb}\alpha_{jb}$ 和 $\alpha_{ja}\alpha_{kb} = \omega\alpha_{kb}\alpha_{ja}$ ， $\forall j < k$ ，其中， $\omega = e^{2\pi i/3}$ 。我们将考虑这些仲费米子之间的编织操作，从而获得演化过程中的 Berry 相位，进而体现仲费米子的非阿贝尔统计规律。具体来说，我们首先考虑下面哈密顿量的基态：

$$\mathcal{H}_0^{\text{Pf}} = -e^{i\pi/6}(\alpha_{1b}\alpha_{2a}^\dagger + \alpha_{2b}\alpha_{3a}^\dagger) + \text{h.c.} \quad (7.4)$$

该哈密顿量导致两个 \mathbb{Z}_3 仲费米子零模 (α_{1a} 和 α_{3b}) 出现在链的边缘，如图 7.1 所示。称它们为“零模”是因为这两个模式不出现在哈密顿量中，因此在基态下它们的布居数可以自由改变。

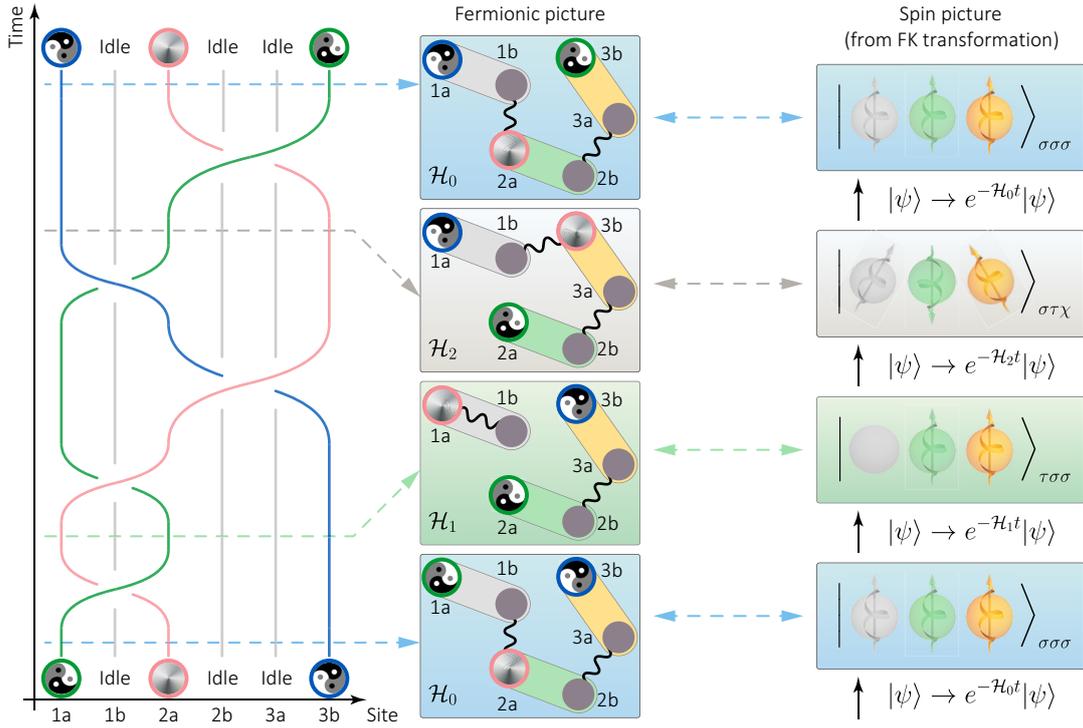


图 7.1 仲费米子零模的编织。左面板：使用辅助仲费米子编织位于仲费米子链两端的两个零模（太极符号）。编织操作在仲费米子零模编码的 3 维量子系统上产生一个 Clifford 门。中间面板：左图编织过程在包含相互作用的仲费米子链上的物理实现。通过哈密顿量在 $\mathcal{H}_0^{\text{Pf}}$, $\mathcal{H}_1^{\text{Pf}}$, $\mathcal{H}_2^{\text{Pf}}$ 和 $\mathcal{H}_0^{\text{Pf}}$ 之间的绝热演化，系统构型发生演化，导致两个仲费米子零模被交换。右面板：用 Fradkin–Kadanoff 变换将仲费米子链映射为 \mathbb{Z}_3 对称性的自旋 1 量子 Potts 模型。对应的演化过程可以被一系列演化时间 $t \rightarrow +\infty$ 的虚时演化来有效地模拟——这些演化将系统反复投影到新哈密顿量的基态上。整个图中，水平虚线将三个不同面板对应阶段的构型联系起来。

$\mathcal{H}_0^{\text{Pf}}$ 具有三重简并的基态，在这个子空间上可以非定域地编码一个 3 维量子系统。我们定义宇称算符

$$Q = \prod_k \alpha_{ka}^\dagger \alpha_{kb},$$

并且选择基 $|\psi_l^{\text{Pf}}\rangle$ ($l = 0, 1, 2$) 作为计算基矢；它们是宇称算符本征值为 ω^l 的本征态。仲费米子的非阿贝尔统计特点导致当两个仲费米子零模 α_{1a} 和 α_{3b} 被交换时，各个本征态 $|\psi_l^{\text{Pf}}\rangle$ 之间将出现不同的相位因子 [192]。为了编织这两个仲费米子零模，我们可以在三个哈密顿量之间绝热地循环演化： $\mathcal{H}_0^{\text{Pf}} \rightarrow \mathcal{H}_1^{\text{Pf}} \rightarrow \mathcal{H}_2^{\text{Pf}} \rightarrow \mathcal{H}_0^{\text{Pf}}$ 。其中：

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1^{\text{Pf}} &= -e^{i\pi/6} \alpha_{2b} \alpha_{3a}^\dagger - \alpha_{1a} \alpha_{1b}^\dagger + \text{h.c.}, \\ \mathcal{H}_2^{\text{Pf}} &= -e^{i\pi/6} (\alpha_{2b} \alpha_{3a}^\dagger + \alpha_{3b} \alpha_{1b}^\dagger) + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (7.5)$$

其中， $\alpha_{1a}\alpha_{1b}^\dagger$ 一项给出铁磁性的相互作用，在物理系统中，它可以使用一个外场实现；而其他项都表示模式之间的顺磁性相互作用。因此，我们设计的演化中，所有哈密顿量都有一个清晰的物理画面，并可以在量子 Hall 系统中自然地实现。

下面对照图 7.1 分析这些绝热演化的作用：

1. 首先，通过关闭模式 1 和模式 2 之间的相互作用，最初在模式 1a 上的仲费米子边缘零和在模式 2a 处的辅助仲费米子将发生交换；
2. 其次，使得现在是孤岛的模式 1 与模式 3 发生相互作用，此时，最初位于模式 3b 的仲费米子零模移动到模式 1a；该模式现在位于相互作用仲费米子链的末端；
3. 最后，通过将系统的耦合重置为它们的配置，将一个仲费米子零模从模式 2a 转移到模式 3b 去。

上面的演化导致两个仲费米子零模 α_{1a} 和 α_{3b} 交换。除此之外，演化过程反复移动了辅助仲费米子，但是其最终回到原位。由于编织操作算符和上面定义的宇称算符可以同时对角化 [192]，因此编织会产生一个 $|\psi_0^{\text{Pf}}\rangle$, $|\psi_1^{\text{Pf}}\rangle$ 和 $|\psi_2^{\text{Pf}}\rangle$ 之间的相对相位，从而体现出仲费米子的非阿贝尔统计性质。具体来说，图 7.1 中编织操作造成的演化可以写为：

$$|\psi^{\text{Pf}}\rangle \rightarrow \mathcal{B} |\psi^{\text{Pf}}\rangle : \mathcal{B} = \text{diag}(1, 1, \omega).$$

7.1.3 量子模拟概要

上一节中已经介绍了仲费米子的数学基础、编织操作以及非阿贝尔统计性质等知识。但是可以看出，这些研究本身具有非常浓厚的理论色彩，并且似乎和之前介绍的光学系统实验具有较大的差异。现在开始填补这个空缺。仲费米子复杂的数学形式和其在量子 Hall 效应平台上的实验难度，恰恰是我们用光学平台对其进行研究的动机。Feynman [176] 首先指出，量子系统的动力学可以被有效地模拟：使用量子计算机或其他人工量子系统，能够精确地再现自然界中量子系统的演化。要能够实现量子模拟，最重要的就是还原目标系统演化的动力学，也就是建立待研究系统的哈密顿量和量子模拟器的哈密顿量之间的映射关系：

$$H_{\text{sys}} \leftrightarrow H_{\text{sim}} \approx f H_{\text{sys}} f^{-1}. \quad (7.6)$$

其中， f 是一个么正映射。这样就可以建立起两个系统演化结果之间的对应关系。参见图 7.2 所示的场景，我们要研究一个量子系统的演化，但是不能直接实现操作 $U = \exp(-iH_{\text{sys}}t)$ 。解决的方法就是在量子模拟器中去实现

$$U' = \exp(-iH_{\text{sim}}t) = \exp(-ifH_{\text{sys}}f^{-1}t) = f \exp(-iH_{\text{sys}}t) f^{-1} = fUf^{-1}.$$

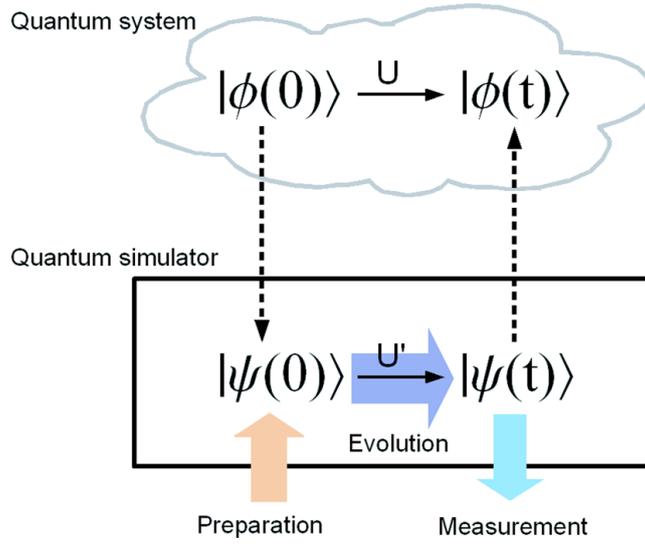


图 7.2 用量子模拟研究量子系统的示意图。图片取自参考文献 [189]

这样，如果量子模拟器系统初态设置为 $|\psi(0)\rangle$ ，要求解演化末态 $|\phi(t)\rangle$ ，就可以在量子模拟器中制备出初态 $|\psi(0)\rangle = f|\phi(0)\rangle$ ，使用操作 U' 演化后得到末态 $|\psi(t)\rangle$ ，即可反推出原先量子系统的末态应为 $|\phi(t)\rangle = f^{-1}|\psi(t)\rangle$ 。一般选用方便操控的量子系统作为量子模拟器，例如线性光学系统就可以作为一个非常优秀的量子模拟器。在量子模拟器中，可以以高精度完成量子态的制备、演化和测量过程。

7.1.4 仲费米子到光学系统的对应

利用量子模拟的概念，就可以将仲费米子编织统计的问题转化为一个线性光学演化的问题。但是，首先要建立两个哈密顿量之间的对应关系。由于我们已经熟悉 Fradkin–Kadanoff 变换，因此将仲费米子系统转化为自旋 1 系统是非常自然的选择。我们使用公式 (7.3) 作用在三个阶段的哈密顿量上，得到它们在自旋体系中的表示：

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_0^S &= -e^{i\pi/6}(\sigma_1\sigma_2^\dagger + \sigma_2\sigma_3^\dagger) + \text{h.c.}, \\
 \mathcal{H}_1^S &= -e^{i\pi/6}\sigma_2\sigma_3^\dagger - \tau_1 + \text{h.c.}, \\
 \mathcal{H}_2^S &= -e^{i\pi/6}(\sigma_2\sigma_3^\dagger + \sigma_1\tau_2^\dagger\tau_3^\dagger\sigma_3^\dagger) + \text{h.c.},
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

根据刚才介绍的量子模拟的知识，我们知道只要进行下面的绝热演化： $\mathcal{H}_0^S \rightarrow \mathcal{H}_1^S \rightarrow \mathcal{H}_2^S \rightarrow \mathcal{H}_0^S$ ，就可以再现仲费米子零模编织操作得到的 Berry 相位。

现在做一个定义：使得 $|k\rangle_\sigma$ 、 $|k\rangle_\tau$ 和 $|k\rangle_\chi$ 分别对应算符 σ 、 τ 和 $\sigma\tau$ 本征值为 ω^k 的本征态。下面将会看到，这种定义将大大简化用光学系统编码仲费米子的操

作。我们使用钟表算符的本征态作为计算基矢， $|\psi_0^{\text{Pf}}\rangle$ 、 $|\psi_1^{\text{Pf}}\rangle$ 和 $|\psi_2^{\text{Pf}}\rangle$ 表示为：

$$\begin{aligned} |\psi_0^{\text{Pf}}\rangle &\leftrightarrow |\psi_0^{\text{S}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|000\rangle_\sigma + |111\rangle_\sigma + |222\rangle_\sigma), \\ |\psi_1^{\text{Pf}}\rangle &\leftrightarrow |\psi_1^{\text{S}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|000\rangle_\sigma + \omega |111\rangle_\sigma + \omega^2 |222\rangle_\sigma), \\ |\psi_2^{\text{Pf}}\rangle &\leftrightarrow |\psi_2^{\text{S}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|000\rangle_\sigma + \omega^2 |111\rangle_\sigma + \omega |222\rangle_\sigma). \end{aligned} \quad (7.8)$$

我们量子模拟的第一个任务是获得造成仲费米子零模编织统计的 Berry 相位演化。有趣的是，求解 Berry 相位不一定需要绝热演化，仅使用投影测量就可以完成任务。我们记向 \mathcal{H}_k^{S} 基态子空间投影的算符为 Π_k ，则有 [193-194]：

$$\phi_{\text{B},l} = -\arg \langle \psi_l^{\text{S}} | \Pi_1 \Pi_2 | \psi_l^{\text{S}} \rangle, \quad (7.9)$$

其中 $|\psi_l^{\text{S}}\rangle$ 就是公式 (7.8) 中给出的 \mathcal{H}_0^{S} 的三个基态。当 $\phi_{\text{B},l}$ 与 l 有关时，就体现出非阿贝尔统计性质。我们使用一系列虚时演化来求出公式 (7.9) 中的 Berry 相位：

$$e^{-\mathcal{H}_0^{\text{S}}t} \cdot e^{-\mathcal{H}_1^{\text{S}}t} \cdot e^{-\mathcal{H}_2^{\text{S}}t} \cdot e^{-\mathcal{H}_0^{\text{S}}t}, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (7.10)$$

使用虚时演化的意义在于可以避免求解每个哈密顿量的基态：当哈密顿量的形式是两项之和时，正常来说求解基态需要进行对角化操作，这对于高维系统而言是困难的。但是，如果这两项是对易的，就可以使用 Baker–Campbell–Hausdorff 公式将虚时演化展开成两项哈密顿量分别虚时演化算符的乘积。具体到本实验中，我们发现由于 \mathcal{H}_1^{S} 和 \mathcal{H}_2^{S} 各有一项与 \mathcal{H}_0^{S} 相同，因此这两项对应的虚时演化根本不用执行——对应其它项的虚时演化，就等价于将系统向下面三个子空间中的依次投影：

$$|k\rangle_\sigma |k\rangle_\sigma |k\rangle_\sigma, \quad |0\rangle_\tau |k\rangle_\sigma |k\rangle_\sigma, \quad |k\rangle_\sigma |l\rangle_\tau |l+k \bmod 3\rangle_\chi, \quad k, l \in \{0, 1, 2\}.$$

在实际实验之前，我们还可以通过合适的编码来进一步简化虚时演化的形式。这是因为 $|k\rangle_\sigma |l\rangle_\tau |l+k \bmod 3\rangle_\chi$ 向其它两个子空间中投影时，系数不依赖于 l ，也就是对应于不同的 l 演化结果都是完全相同的。这样当我们使用量子模拟时，就可以只编码 $l=0$ 的一个演化路径，而忽略 $l=1$ 和 $l=2$ 的演化路径。当我们重新将态归一化时，两种方式没有任何区别。因此，最终仲费米子编织时几何相位的模拟就约化为三个子空间中正交基之间进行循环转化时的系数求解。只要使用光学系统编码这三个正交基，测量它们投影时的系数，即可根据公式 (7.9) 求出 Berry 相位，从而观测到仲费米子零模的非阿贝尔统计。下面我们具体介绍如何在线性光学系统中实验实现这些系数的测量。

7.2 实验模拟仲费米子的编织统计

由于一个自旋 $(d - 1)/2$ 的系统可以直接对应成一个 d 维量子比特，进而编码到光子的路径等自由度中，因此辅以 Fradkin–Kadanoff 变换的手段，就可以使用线性光学体系对仲费米子系统开展光量子模拟。在本实验中，我们将自旋 1 链的基态编码为单个光子的不同空间模式，构成了一个 3 维量子系统。由于只需研究简并基态空间中的波函数演化，我们在装置中可以反复使用公式 (7.9) 中的虚时演化将波函数演化到新的基态，而耗散掉激发态；这些连续实现的光子虚时演化是耗散式量子模拟的核心过程。

7.2.1 专用量子模拟器的设计

我们在图 7.3 中给出用于实现任意 3 维量子态的制备、虚时演化和测量的仲费米子光学模拟器。我们使用光束偏移器制备编码在路径模式上的 3 维量子态，在两组光束偏移器之前和之间都加入半波片和四分之一波片，从而实现三个空

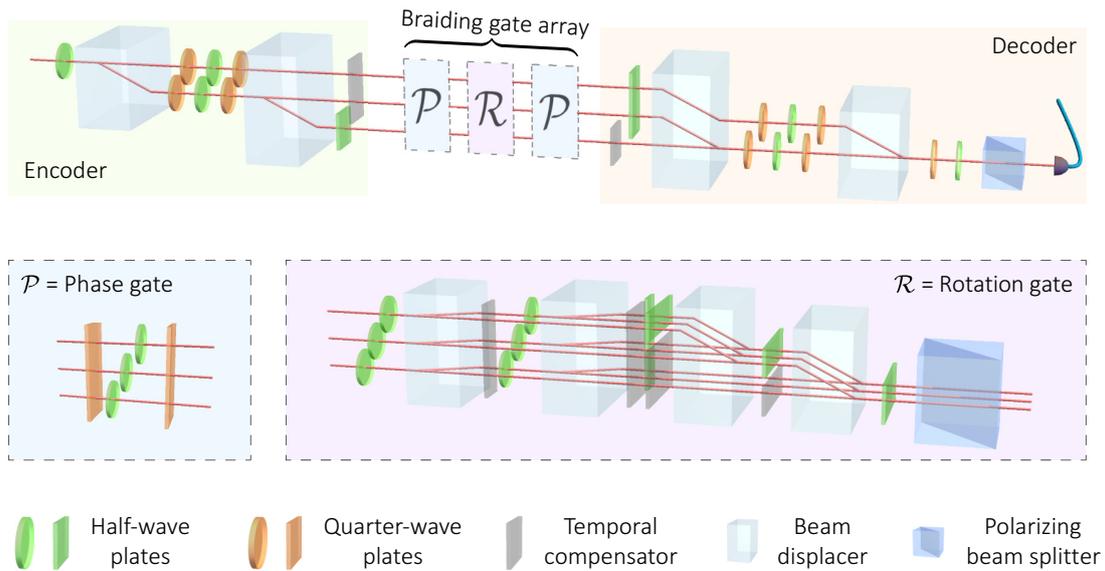


图 7.3 仲费米子光学模拟器。本装置将仲费米子零模携带的 3 维量子态 $|\psi^{\text{Pf}}\rangle$ 编码到光子的路径模式上，而后执行演化和测量操作。在编码部分，使用光束偏移器阵列实现量子态的制备。利用半波片和四分之一波片来控制每种模式的复振幅。在演化部分，光子模式经受所需的编织演化门。这些演化门包括两个相位门 \mathcal{P} ，它可以在三种模式之间施加相位演化，以及一个旋转门 \mathcal{R} ，它可以实现任意的 $\text{SU}(3)$ 旋转。在解码部分，再次利用光束偏移器架构，通过量子态层析恢复出仲费米子零模编码的量子态。在带有虚线框的子图中，我们给出 \mathcal{P} 和 \mathcal{R} 门的详细实现方法。我们插入倾角可调的玻璃片进行时间补偿，以对齐各个模式的光学长度，从而优化装置的干涉可见度。

间模式复振幅的按需调控。由于我们只考虑基态子空间中的波函数，并且使用了优化的编码方式，编码仲费米子链所需的模式数从原则上的 $3^4 = 81$ 个减少到实验中仅需要 $3^2 = 9$ 个。这种编码方式极大地扩展了我们光学模拟器的适用范围，并且有助于在下面进一步模拟仲费米子零模的编织。

测量 Berry 相位的基本模块就是么正演化器和虚时演化器。当按照公式 (7.9) 求出的投影算符和当前哈密顿量具有全部相同的本征态时，将由非耗散的相位门 \mathcal{P} 实现么正演化，它在三种光学模式之间产生相对相位。每个 \mathcal{P} 门由两个四分之一波片中间夹着三个独立作用于每条路径的可调节半波片构成，其中四分之一波片的光轴总是固定在 45° ，而半波片的角度就决定了所加的相位。当投影算符与当前哈密顿量的本征态不全同时，必须以耗散方式实现虚时间演化，对应的门操作为旋转门 \mathcal{R} 。它由两个部分组成：首先进行基变换，随后将能量非零的激发态对应的模式完全耗散。具体来说，首先用光束偏移器连续两次在水平方向分离三个原先在竖直方向上排列起来编码量子态的光学模式，然后逐个调整产生的九个模式的复振幅，随后将这些模式垂直合并以获得水平排列的量子态。这些模式合并时，来自不同初始模式，对应新的基态的波函数相干叠加，从而实现任意的 $SU(3)$ 旋转操作；对应激发态的光子则因虚时演化而被耗散。

最后，在解码阶段，另一对光束偏移器将三种模式重新组合回来。我们使用半波片和四分之一波片，与偏振分束器一起进行量子态层析。由于测量依赖于不同光学模式之间的干涉，每个演化路径的光程必须对齐，以保持装置良好的时间相干性，从而尽可能提高干涉可见度。我们还在装置中引入了额外的时间补偿器来补偿由波片和光束对齐不完美性引入的路径长度差异，并通过倾斜它们来补偿不同路径之间的相对相位。

7.2.2 实验结果

首先刻画编织操作的整体效果。我们使用 9 个 3 维量子态， $|\psi_j\rangle, j = 1, \dots, 9$ ，它们被编码在 \mathcal{H}_0^S 的三重简并基态中。我们对于这些量子态进行编织演化，然后使用量子态层析来获取末态结果。态层析结果如图 7.4 所示，通过将仲费米子零模的编织转化为三个连续的基旋转和虚时演化，我们实验测得在 $|\psi_2^S\rangle$ 和 $|\psi_0^S\rangle$ 之间的 Berry 相位值为：

$$\delta\phi_{B,2} = 2.061 \pm 0.128,$$

而 $|\psi_1^S\rangle$ 和 $|\psi_0^S\rangle$ 之间的相位，

$$\delta\phi_{B,1} = 0.066 \pm 0.104,$$

则几乎可忽略不计。实验结果与预期的 Z_3 仲费米子编织矩阵 $\mathcal{B} = \text{diag}(1, 1, \omega)$ 的平均保真度为 94.9%，清晰地体现了仲费米子零模的非阿贝尔编织统计。为了

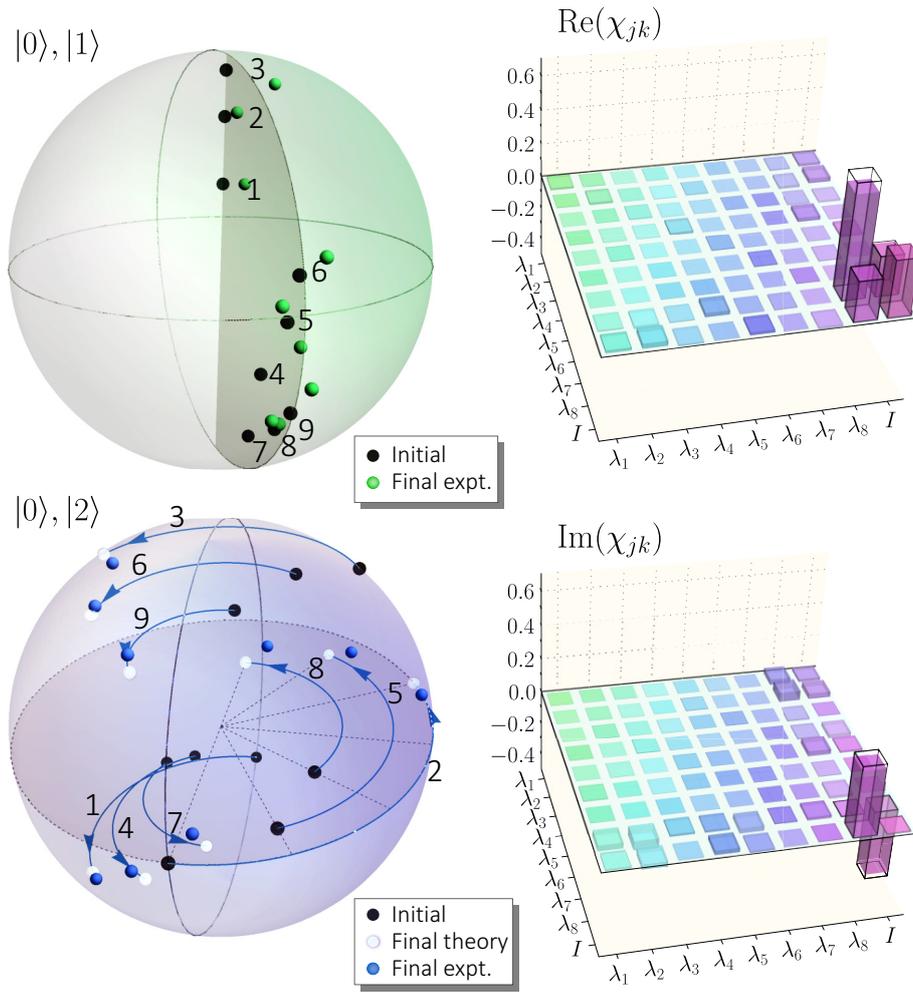


图 7.4 仲费米子编织的实验结果。 使用 9 个量子态 $|\psi_j\rangle, j = 1, \dots, 9$ 输入光量子模拟器，在演化之后使用量子态层析确定演化结果。上下两个 Bloch 球分别表示演化结果在 $\{|\psi_0^S\rangle, |\psi_1^S\rangle\} \otimes \{|\psi_0^S\rangle, |\psi_1^S\rangle\}$ 和 $\{|\psi_0^S\rangle, |\psi_2^S\rangle\} \otimes \{|\psi_0^S\rangle, |\psi_2^S\rangle\}$ 两个子空间中的投影。可以看到上面的 Bloch 球中不出现显著的演化相位，下面的球中每个点都划过接近 $2\pi/3$ 圆心角的弧，与 $|\psi_2^{\text{Pf}}\rangle$ 相对 $|\psi_0^{\text{Pf}}\rangle$ 和 $|\psi_1^{\text{Pf}}\rangle$ 得到的额外的 $2\pi/3$ Berry 相位符合。右图：使用量子过程层析得到的演化过程矩阵 χ_{jk} 。我们使用过程矩阵展开在 Gell-Mann 矩阵上的系数来表示。边缘实线和颜色填充分别对应理论和实验值。

估计实验误差，我们假设实验中光子计数统计服从泊松分布，对符合事件数重新采样 100 次，计算出所测物理量的 1σ 标准偏差。

进一步地，我们使用量子过程层析来完整地表征编织过程的动力学。我们计算出演化的过程矩阵 χ_{jk} ，它被展开在 Gell-Mann 矩阵 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_8\}$ 和恒等式 \mathbb{I}_3 组成的完备基矢上。这个过程矩阵如图 7.4 所示，它也体现出 $|\psi_2^S\rangle$ 和其他两个态之

间出现的 $2\pi/3$ 的相对相位。其中，8 个 Gell-Mann 矩阵的定义为：

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

通过将编织结果与理论预期进行比较，得到量子模拟器中编织操作的保真度为 93.4%。因此，基于一系列虚时演化进行的光量子模拟忠实地再现了仲费米子编织过程的非阿贝尔统计性质。在图 7.5 中，我们给出一些更详细的实验结果。

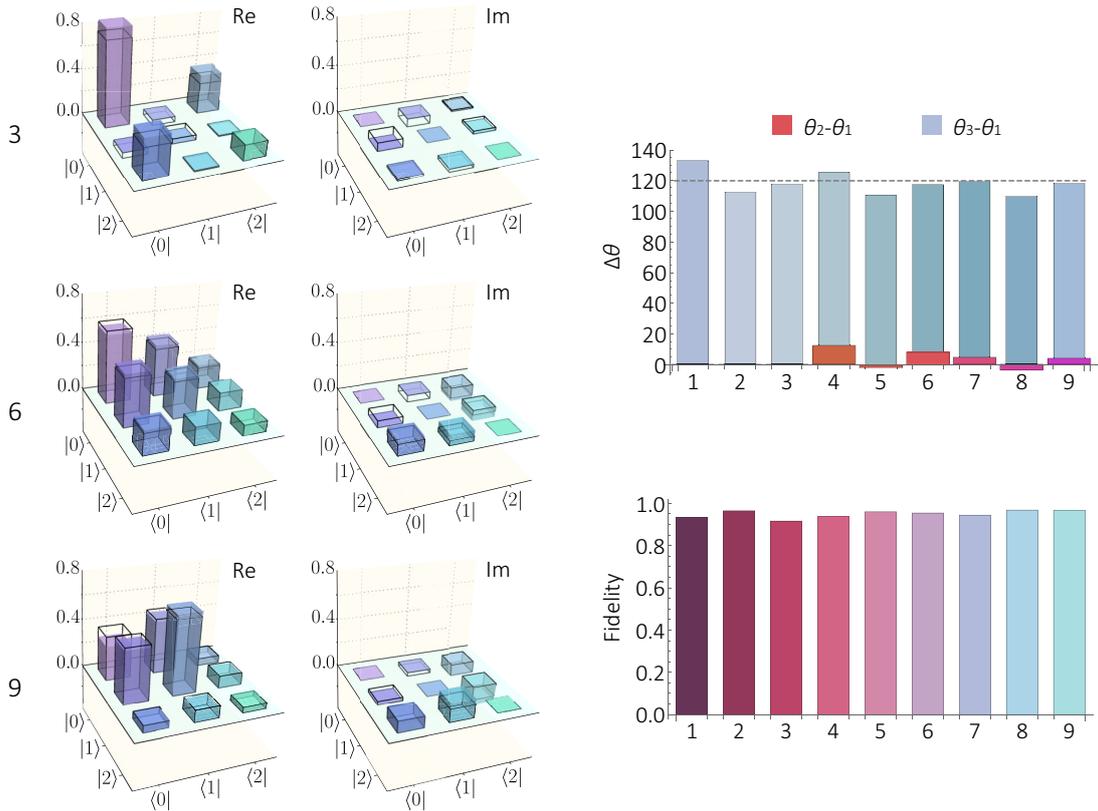


图 7.5 仲费米子编织的实验补充结果。左图：三个示例量子态编织操作后的密度矩阵（颜色填充）和理论预期（边缘实线）对比。右图：编织操作后 $|\psi_1^S\rangle$ 和 $|\psi_2^S\rangle$ 相对于 $|\psi_0^S\rangle$ 获得的额外 Berry 相位测量结果，以及所有 9 个量子态相对理论预言的保真度。

7.3 从互文性到通用拓扑量子计算

在前一节中，已经介绍了使用线性光学和数学映射的手段对于仲费米子零模的编织进行模拟的方法。这一节我们再次回到对互文性的研究，并展示其与拓扑量子计算的关系。使用不同的编织操作，原则上就可以得到所有的 Clifford 门。但是，至少需要一个 non-Clifford 门操作才能够实现通用量子计算 [85]，这个操作没有办法仅仅使用编织得到。如果使用一些“魔术态”作为辅助量子系统，就可以使用受控的 Clifford 门操作加上对于辅助态的测量，实现等效的 non-Clifford 门操作，这个原理如图 7.6 所示。更重要的是，Bravyi 和 Kitaev [84] 指出，如果可以实现精确的 Clifford 门操作，就可以构造一个量子线路，从一系列相同的，保真度较低的魔术态中提取出一个保真度升高的魔术态，如此反复就可以无限提高 non-Clifford 门的实现精度，从而实现容错的通用量子计算，这个方法现在被称为魔术态萃取。

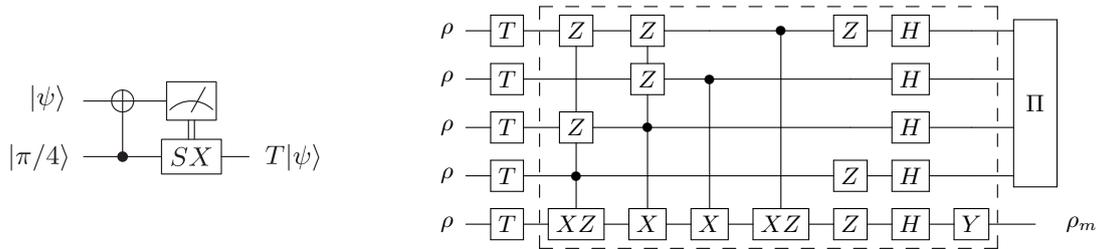


图 7.6 魔术态辅助的通用量子计算和魔术态萃取。左图表示如何使用一个魔术态和 Clifford 门操作实行一次 non-Clifford 门操作，右图是一个 $5 \rightarrow 1$ 魔术态萃取的量子线路图。

在 Bravyi et al. [84] 的工作中，计算了对于量子比特实现魔术态萃取的噪声阈值——与理想的魔术态距离大于噪声阈值的量子态不能用于魔术态萃取。此后，对于各种系统，发展了不同的魔术态萃取协议。究竟哪些系统能够进行魔术态萃取呢？Howard et al. [22] 给出了一个 CSW 方法构建的非互文隐变量不等式，其中的测量是使用向一些 Clifford 群元素本征态的投影算符来构成的。当量子态能够违反该非互文隐变量不等式时，也能够用于魔术态萃取。我们称这些量子态表现出 Clifford 互文性。

现在对于 3 维量子系统的情况，使用 Weyl–Heisenberg 表示来明确地给出 Clifford 互文性的判据不等式。首先，定义 Weyl–Heisenberg 位移算符为：

$$D_{x,z} = \omega^{2^{-1}xz} \tau^x \sigma^z, \quad \{x, z\} \in \{0, 1, 2\}. \quad (7.12)$$

这些算符的本征态均为 $\{1, \omega, \omega^2\}$ 。现在选取其中的 4 组位移算符，记为 $\mathbf{D} = \{D_{0,1}, D_{1,0}, D_{1,1}, D_{1,2}\}$ ，它们的本征态可以构成 3 维希尔伯特空间中的一组相互无偏基。我们先定义三个辅助向量： $\mathbf{a} = \{1, 0, 1, 2\}$ ， $\mathbf{b} = -\{0, 1, 1, 1\}$ ， $\mathbf{r} = x\mathbf{a} + z\mathbf{b}$ ，其中，

$x, z \in \{0, 1, 2\}$. 进一步地, 记 $\hat{\Pi}_j^r$ 为对应于向 \mathbf{D} 的第 j 个元素的本征值为 ω^j 的本征态的投影算符。那么就可以将 Clifford 互文性表示成下面非互文隐变量不等式的违背:

$$\mathcal{M} := \max_{\mathbf{r}} \text{Tr}[A^{\mathbf{r}} \rho] \stackrel{\text{NCHV}}{\leq} 0, \quad (7.13)$$

其中, $A^{\mathbf{r}} = \mathbb{I}_3 - \sum_{j=1}^4 \hat{\Pi}_j^r$.

这个不等式被理想的魔术态最大违背, 违背值刚好是黄金比: $\mathcal{M} \stackrel{\text{Q}}{\leq} (\sqrt{5} - 1)/2$. 因此, 不等式 (7.13) 违背的大小就可以体现出一个量子态被作为魔术态, 用于进行通用量子计算的能力: 当违背大时, 直接使用量子态本身, 或进行少数几轮魔术态萃取, 就可以用于实现保真度超过容错计算阈值 [195] 的 non-Clifford 门操作; 当违背小时, 所需的魔术态萃取轮数就显著增加, 需要反复使用魔术态萃取来突破容错阈值, 这就导致大量资源太被消耗。当 $\mathcal{M} \leq 0$ 时, 量子态就无法通过魔术态萃取逼近资源态了, 其行为就可以被经典计算所模拟, 因此根本不能体现出量子计算的加速特点。

7.3.1 互文性在编织操作下的动力学

由于公式 (7.13) 定义的所有投影算符都是 Clifford 算符的本征态, 这些算符在 Clifford 群元素造成的操作下将闭合地演化, 而不会产生 non-Clifford 算符。公式 (7.13) 对于所有可能算符对称的形式, 使得它的取值在 Clifford 操作下是不变的。也就是说, Clifford 操作不影响量子态执行魔术态萃取的能力。

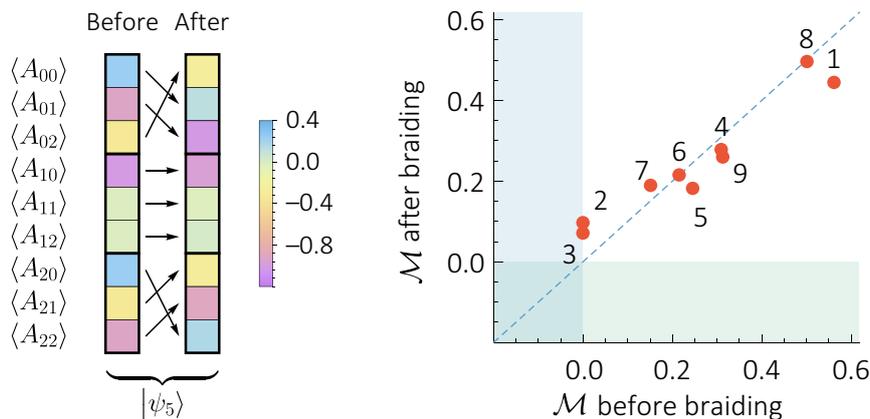


图 7.7 编织操作和 Clifford 互文性的相互作用。左图给出公式 (7.13) 中 9 个互文目击的值在编织操作前后的变化, 以及算符之间的对应关系。右图给出对应于图 7.4 中的 9 个量子态, Clifford 互文性的强度 \mathcal{M} 在编织操作前后的变化情况。

我们从实验上模拟仲费米子零模编码的 3 维量子系统互文性在编织操作下互文资源的演化情况。对于初态和末态，分别直接进行投影测量，求得公式 (7.13) 中 9 个 Clifford 互文目击算符的取值。理论分析表明，在演化前后算符的取值应当满足：

$$\begin{cases} \langle A_{0z} \rangle \rightarrow \langle A_{0(z+1) \bmod 3} \rangle, \\ \langle A_{1z} \rangle \rightarrow \langle A_{1z} \rangle, \\ \langle A_{2z} \rangle \rightarrow \langle A_{2(z-1) \bmod 3} \rangle. \end{cases}$$

因此，由它们的最小值决定的 \mathcal{M} 保持不变。实验结果如图 7.7 所示。首先考察一个样本态 $|\psi_5\rangle$ 中 9 个互文目击算符的变化情况，它们符合上面提到的轮转对称关系。接下来，我们对于实验中使用的 9 个样本态都测量演化前后的 Clifford 互文性目击 \mathcal{M} 。结果表明，所有样本态的互文目击在演化前后都几乎保持不变，因此进一步体现了光量子模拟器对于编织演化过程的精确还原。

研究编织操作与互文性的相互作用的第一个意义在于，可以在仲费米子零模编码的量子系统中，使用编织操作和魔术态萃取实现容错的通用量子计算。由于互文性资源不会受到编织操作的影响，因此可以在量子计算的任意时刻进行魔术态萃取，通过魔术态萃取得到一个魔术态，再使用编织就可以在量子计算的任意时刻等价地进行 non-Clifford 门操作，这样就获得了量子计算的通用性。

7.3.2 仲费米子拓扑保护的互文性

研究编织操作与互文性的相互作用的第二个意义在于，拓扑系统中的编织操作免疫局域噪声的作用，有可能实现理想的 Clifford 门操作，这刚好与魔术态萃取的理论要求（无噪声的 Clifford 门操作和含噪声的魔术态 [84]）建立起了良好的对应关系。另外，编织操作不会向量子互文性引入额外的误差，这样拓扑保护就减少了实际上进行量子计算时所需的魔术态萃取的资源消耗。

为了展示这一问题，我们用一个噪声模型来研究编织操作与互文性的相互作用。我们分别考虑拓扑编码和自旋编码的 3 维量子系统对于局域跃迁噪声和相位噪声的响应。我们将会看到，由于拓扑保护的作用，局域噪声将导致拓扑系统的波函数发生跃迁，离开编码了量子信息的基态子空间，因此只要向基态子空间中重新进行基于虚时演化的投影，就可以简单地实现纠错。这种纠错机制非常类似谐振子系统中 Gottesman–Kitaev–Preskill 编码的量子比特纠错方式 [196]。下面具体地介绍我们使用的模型。首先，定义仲费米子对应的 Fock 费米子算符；一个 Fock 费米子对应于两个位于同一处的，下标分别为 a 和 b 的仲费米子模式，

这和一个普通的费米子对应于两个马约拉纳费米子是一样的：

$$C_k = \frac{2}{3}\alpha_{ka} - \frac{1}{3}\sum_{m=1}^2 \omega^{m(m+1)/2} \alpha_{ka}^{m+1} \alpha_{kb}^{\dagger m}. \quad (7.14)$$

有了 Fock 费米子算符，我们就可以用它写出仲费米子系统中出现的噪声的数学形式。具体来说，一个跃迁噪声使得一个 Fock 费米子移动到一个相邻的位置上，它被表示为：

$$X^{\text{Pf}} = C_k^{\dagger} C_{k+1}.$$

我们这里只考虑费米子位点 1 和 2 之间的跃迁噪声，对于其他位点是非常类似的。使用 Fradkin–Kadanoff 变换，可以将其转换到自旋表象下：

$$X^{\text{S}} = \frac{1}{9}\sigma_1^{\dagger}(2 - \tau_1 - \tau_1^{\dagger})\tau_1\sigma_2(2 - \tau_2 - \tau_2^{\dagger}). \quad (7.15)$$

对于一个仲费米子零模编码的密度矩阵，发生概率为 p 的跃迁噪声作用效果为：

$$\rho \rightarrow \mathcal{X}^{\text{S}}(p, \rho) = (1 - p)\rho + pX^{\text{S}}\rho X^{\text{S}\dagger}. \quad (7.16)$$

一个相位噪声在一个 Fock 费米子上产生一个相位系数，它被表示为：

$$Z^{\text{Pf}} = C_k C_k^{\dagger}.$$

我们也只考虑费米子位点 1 上的相位噪声。使用 Fradkin–Kadanoff 变换将其转换到自旋表象下：

$$Z^{\text{S}} = \frac{1}{3}(3\mathbb{I}_3 - \tau_1 - \tau_1^{\dagger}). \quad (7.17)$$

对于一个仲费米子零模编码的密度矩阵，发生概率为 q 的相位噪声作用效果为：

$$\rho \rightarrow \mathcal{Z}^{\text{S}}(q, \rho) = (1 - q)\rho + qZ^{\text{S}}\rho Z^{\text{S}\dagger}, \quad (7.18)$$

我们现在计算这两个噪声对于计算基矢的作用效果，对于任意态的作用效果则只需使用计算基矢的演化结果和叠加原理即可得到，这和第 3 章中我们计算熔接门等装置的输出效果的方法是一样的。注意，演化完成后投影回到基态子空间的项才有意义。结果表明：

$$\begin{cases} \langle \psi_i^{\text{S}} | \mathcal{X}^{\text{S}}(p, |\psi_j^{\text{S}}\rangle\langle\psi_j^{\text{S}}|) | \psi_i^{\text{S}} \rangle = (1 - p)\delta_{ij}, \\ \langle \psi_i^{\text{S}} | \mathcal{Z}^{\text{S}}(q, |\psi_j^{\text{S}}\rangle\langle\psi_j^{\text{S}}|) | \psi_i^{\text{S}} \rangle = (1 - q)\delta_{ij}. \end{cases}$$

也就是说，不管局域噪声的强度多么大，所有未被噪声耗散，仍然留在基态子空间中的波函数与噪声发生前的波函数相比，都完全没有变化。我们直观地观测到，拓扑保护使得仲费米子零模编码的量子信息完全免疫任何局域噪声！

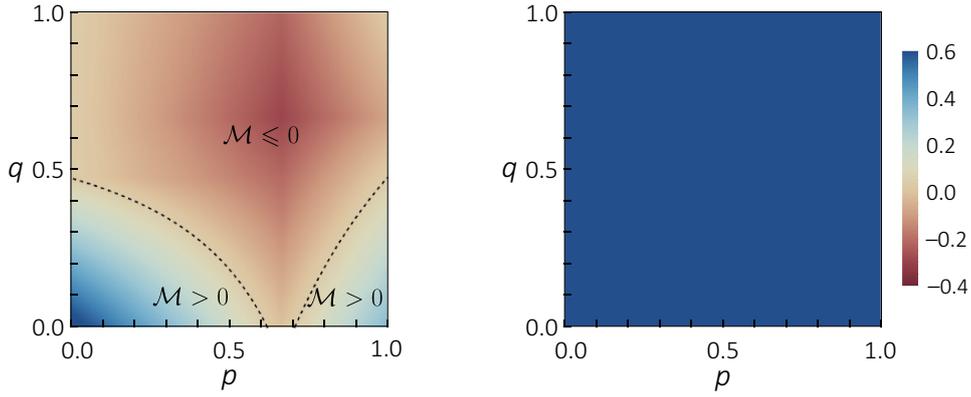


图 7.8 Clifford 互文目击算符 \mathcal{M} 的值对噪声的响应。左右两图比较了非拓扑保护系统和仲费米子零模编码的拓扑保护系统中，互文目击算符的取值在噪声下的行为，其中虚线表示出 $\mathcal{M} = 0$ 的魔术态萃取可行性分界线。

作为对比，我们考虑跃迁和相位噪声在不受拓扑保护的自旋编码量子系统中的影响。此时，对应前面噪声的物理意义，使用钟表算符和平移算符构造两种噪声，分别定义它们的超算符形式为：

$$\mathbf{T}(p, \rho) = (1 - p)\rho + \frac{p}{2}(\tau\rho\tau^\dagger + \tau^\dagger\rho\tau), \quad (7.19)$$

以及

$$\Sigma(q, \rho) = (1 - q)\rho + \frac{q}{2}(\sigma\rho\sigma^\dagger + \sigma^\dagger\rho\sigma). \quad (7.20)$$

此时，由于不存在基态子空间外虚时演化的拓扑保护机制，两个超算符都会使得态的形式产生变化。

我们现在先集中在考虑噪声对于魔术态萃取这个子流程的作用，此时，最有价值的是 Clifford 互文性的强度变化。对于自旋编码的非拓扑保护系统，我们选用一个非常接近理想魔术态的初态 $|\psi\rangle = \{1/2, 0, \sqrt{3}/2\}^\dagger$ ，在上面依次以 p 和 q 的概率施加钟表算符和平移算符构造的噪声 $\mathbf{T} \circ \Sigma$ （注意，这两个超算符是对易的），然后计算表征魔术态萃取资源的互文目击算符 \mathcal{M} 的变化。结果如图 7.8 所示，两种噪声都导致 Clifford 互文性快速减少，且当发生概率超过一定值时，量子态将完全失去用于魔术态萃取的能力。作为对比，当使用仲费米子零模编码相同的初态，然后以 p 和 q 的概率施加跃迁和相位噪声 $\mathcal{X} \circ \mathcal{Z}$ （这两个超算符也是对易的）时，量子态包含的 Clifford 互文性完全不变。

我们接下来从实验上观测这种拓扑保护现象。作为一个概念验证性实验，我们只关注跃迁噪声和平移算符构造的噪声作为例子。为了实现这两种噪声，我们将实验装置中的两个相位门 \mathcal{P} 都设置为不执行任何操作，而使用旋转门 \mathcal{R} 分别施加两个噪声超算符 \mathcal{X} 和 \mathbf{T} 。在对应拓扑系统的演化后面，还使用虚时演化耗散

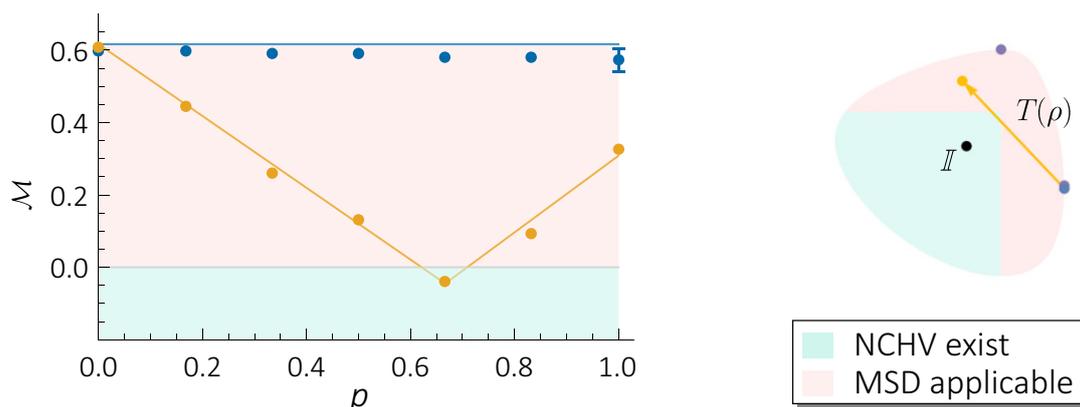


图 7.9 拓扑保护的 Clifford 互文性实验结果。左图为实验测量的 Clifford 互文目击的值，蓝色和黄色分别给出仲费米子零模编码的拓扑系统和自旋编码的非拓扑系统对于噪声的响应。右图形象地给出量子态受到噪声影响时，在态空间中的轨迹。注意对于拓扑系统态的位置不变，一直停留在右边一点。最右和最上分别为两个魔术态。两张图的绿色区域表示对应的量子关联可以被非互文隐变量理论解释，同时魔术态萃取不可用。红色区域的意义刚好相反。

掉激发态的部分。最后，仍然使用投影测量的方法求出 Clifford 互文性目击算符的取值。

我们对于两种系统的实验结果如图 7.9 所示。对于仲费米子零模编码的系统，光量子模拟得到的 Clifford 互文性的指标至少有 $\mathcal{M} \geq 0.580 \pm 0.013$ 。而对于自旋编码的非拓扑保护系统，这个互文性指标初始时随着噪声快速减小，在 $\rho = 2/3$ 附近已经小于 0，表示这个量子态不能被用于魔术态萃取了。然而，此后随着噪声的进一步增加，互文性又开始增加，但是不能恢复到初始值。这里使用一个非常直观的方法来解释这一现象。在态空间中以互文目击算符的两个分量作为坐标，构造出一个切片，可以发现随着平移算符强度的增加，量子态初始时几乎从一个魔术态出发，而后逼近最大混态——这对于魔术态萃取来说是一个垃圾态；但是最后又接近另一个魔术态，因此导致 Clifford 互文算符又开始增加。总的来说，结果表明非拓扑编码的量子系统明显受到局域噪声的影响，而拓扑编码的系统则对于局域噪声有着很强的鲁棒性。在图 7.10 中，给出该实验的补充结果，从而进一步体现仲费米子零模编码的量子比特的拓扑保护特点。

7.3.3 用互文性研究仲费米子的拓扑保护

现在，我们转而使用互文性作为工具，研究局域噪声在两种编码方式下对于量子态本身的影响。Bharti et al. [42] 发现，互文性可以作为量子态的自检测工具使用。笔者只使用最简单的语言来介绍设备无关和自检测等非常广泛的概念：

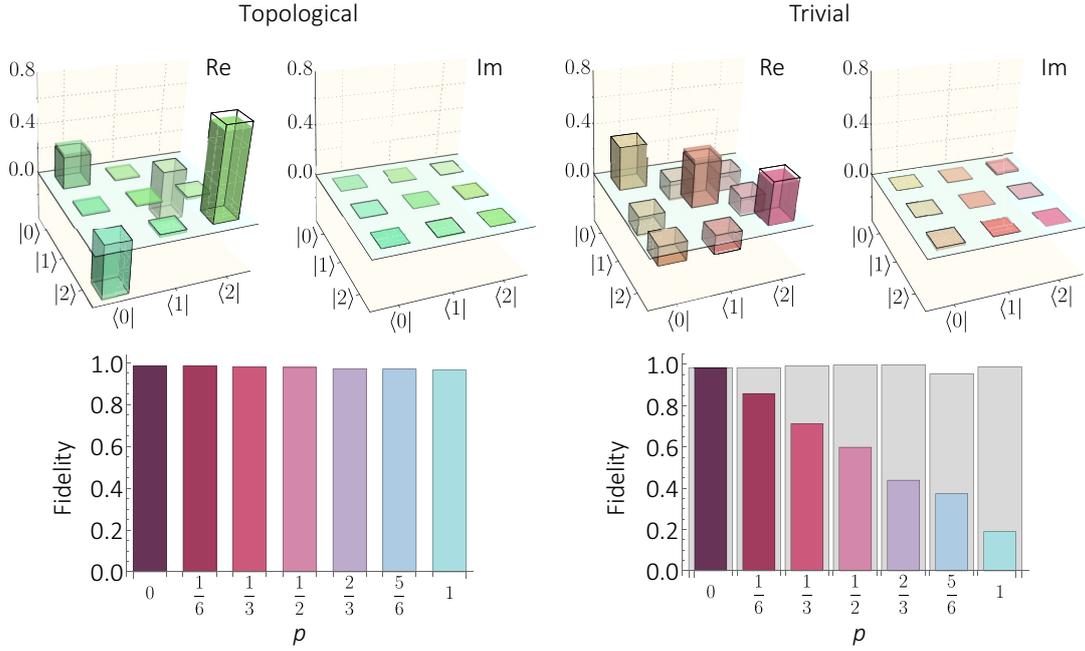


图 7.10 拓扑保护的 Clifford 互文性实验补充结果。左图和右图分别是仲费米子零模编码的拓扑量子系统和自旋编码的普通量子系统的实验结果。上图：对于量子态 $|\psi\rangle$ 演化后执行量子态层析，得到噪声概率为 $p = 2/3$ 时的密度矩阵。边缘实线和颜色填充分别对应理论和实验值。下图：每个数据点的实验结果和理论预测之间的状态保真度。在右侧的图表中，灰色和彩色柱状图分别代表末态相对于考虑和不考虑翻转误差影响时的理论状态的保真度。

自检测指的就是指一个抽象不等式的最大违背只能被特定的一组态和测量取到，其它造成最大违背的态和测量都可由这个特定组合做局域操作来得到。换句话说，即使不知道态和测量中的任何一个，这个最大违背就立刻给定了两者之间的关系；只要知道两者中的任何一个，这个最大违背就立刻给定了另一个。例如前面的 CHSH 实验就是最大纠缠态的自检测。类似地，KCBS 实验可以作为一个量子态是否通过图 2.3 中五角星测量的中心的判据——KCBS 不等式的违背越高，未知量子态就越接近五边形中心的量子态。

在本工作中，我们使用公式 (4.3) 中的概率形式进行量子态的自检测。为了保证每个章节的完整性，这里再次写出非互文隐变量不等式的具体形式：

$$\mathcal{N} := \Pr_{\phi}(1|k) \stackrel{\text{NCHV}}{\leq} 2. \quad (7.21)$$

我们选取非互文隐变量不等式的五个投影算符对应的本征矢量为：

$$|k\rangle = \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}} \left\{ \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right), \frac{\sqrt{1 + \sqrt{5}}}{2} \right\}^{\dagger}, \quad k = 1, 2, \dots, 5.$$

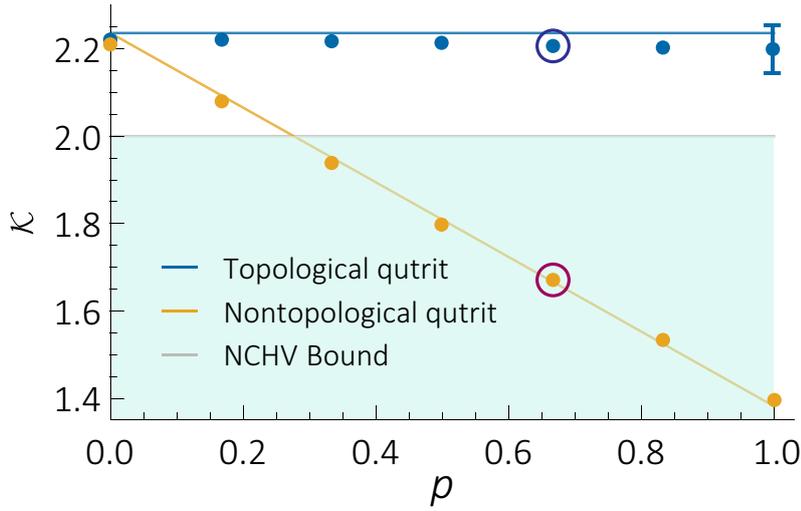


图 7.11 拓扑保护的 KCBS 互文性实验结果。 图中的数据点给出实验测量的 KCBS 互文不等式的值（见公式 (7.21)）对于噪声的响应。蓝色和黄色分别给出仲费米子零模编码的拓扑系统和自旋编码的非拓扑系统对于噪声的响应。绿色区域表示非互文隐变量模型不被违背，量子态不体现互文性的区域。

此时，对应得到不等式最大违背的量子态是 $|\phi\rangle = \{0, 0, 1\}^\dagger$ 。我们就将其作为光量子模拟器的输入态，然后仍然使用一个虚时演化旋转门 \mathcal{R} 来施加噪声。方法与研究 Ciffford 互文性时完全相同。由于 KCBS 不等式自检测的特点，当它的取值超过非互文隐变量理论的界限时，违背的大小基本就给出量子态到目标态的距离。

实验结果如图 7.11 所示。对于仲费米子零模编码的系统，光量子模拟得到的 KCBS 互文性的指标至少有 $\mathcal{K} \geq 2.199$ 。按照 Bharti et al. [42] 的计算结果，这个显著的违背说明仲费米子零模编码的量子态在经历噪声之后，对于目标态的偏移用迹距离表示，不超过 $T(\phi, \phi') \leq O(\sqrt{2.236 - 2.199}) = O(\sqrt{0.037})$ 的数量级。相比较之下，由于在非拓扑系统中，噪声导致量子态一直远离目标态，因此 KCBS 不等式的值是单调下降，而不会像研究 Ciffford 互文性的时候在某个临界噪声强度之后开始重新上升。实验结果再次从量子态自检测的意义上表明，非拓扑编码的量子系统明显受到局域噪声的影响，而拓扑编码的系统则对于局域噪声有着很强的鲁棒性。

最后，我们使用量子过程层析的结果补充自检测的结果，再次直观地展示对应两种不同物理系统，光学模拟器中两种不同编码方式中出现的局域噪声所造成影响差异。图中的两个过程矩阵实部分别对应拓扑编码的仲费米子零模系统和非拓扑编码的普通量子系统在 $p = 2/3$ 噪声下的演化结果。我们看到，对于

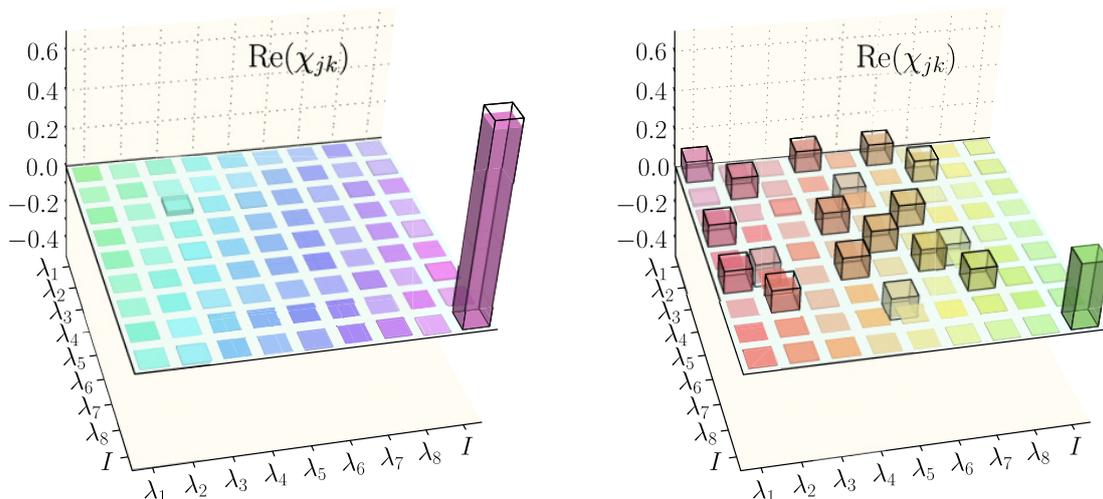


图 7.12 不同系统中噪声作用的量子过程层析结果。左图和右图分别表示拓扑编码的仲费米子零模系统和非拓扑编码的普通量子系统在 $p = 2/3$ 噪声下的演化结果。它们被展示在 Gell-Mann 矩阵上，并且只显示实数部分。边缘实线和颜色填充分别对应理论和实验值。

仲费米子零模编码的拓扑量子系统而言，演化的过程矩阵几乎就是一个单位矩阵，量子过程保真度高达 96.0%，说明系统在遭受局域噪声的作用后，基态子空间中的波函数几乎没有发生演化。相比而言，非拓扑保护的量子系统过程矩阵已经明显偏离了单位矩阵，说明局域噪声显著破坏了系统中的量子信息。

7.4 小结

到此，对于仲费米子的光量子模拟和拓扑保护的量子互文进行的实验研究介绍就告一段落了。笔者现在简要讨论这个实验的意义。从理论上来说，拓扑系统是未来实现容错量子计算的有力候选者。不论基于马约拉纳费米子还是仲费米子编织的量子计算系统，都要面临的一个障碍就是编织能够实现的操作始终属于 Clifford 群，因此不构成一组通用的量子门操作。为了解决这个问题，我们用魔术态萃取作为获得量子计算通用性的途径。我们在这种架构下模拟了基于仲费米子量子计算的两个主要元素：生成拓扑 Clifford 门的编织操作，以及作为魔术态萃取资源的拓扑保护的互文性。虽然互文性本身已经是各种量子信息任务的重要资源，但它与拓扑系统和噪声免疫之间的关系从前并不为人们很好地理解。我们的工作开拓了在真实拓扑系统中编码互文性，并保护其免受环境噪声影响的全新研究方向。

从实用的角度来看，用量子模拟研究拓扑系统不仅为拓扑量子计算提供了

一些新的思路，而且为研究编码系统的容错性提供了一个测试平台。在这个方面的研究目前已经有一定的发展，例如朱晓波老师和潘建伟老师的团队使用超导量子模拟器，实现了具有主动纠错功能的马约拉纳零模编码的量子比特的隐形传态 [197]。对于我们的系统而言，尽管仅仅使用单个光子对整个系统进行编码，导致我们的模拟器不是指数可扩展的，但本实验中的研究方法可以直接扩展到几个仲费米子链，从而能够检验两个（高维）量子比特组成的复合系统中的互文性，最终直接对标 Howard et al. [22] 的理论工作。因此，我们的方法有望在未来用于模拟更大规模的仲费米子链，并且用于研究一些小规模的拓扑量子算法。

第 8 章 展望与讨论

笔者已经介绍了本人在互文性的研究方面进行的一系列工作。这些工作的实验部分都完成在线性光学平台上，除了对最新理论进展的直接检验（第 4 章中的第一个工作）之外，更多的体现了笔者与合作者们在理论研究（第 4 章中的第二个工作和第 5 章）、实验方法创新（第 6 章）、以及对于新颖物理系统性质的探究（第 7 章）中所取得的一系列进展。这些广泛而丰富的研究内容，在一定程度上可以看做是互文性在量子力学、量子信息学和量子计算等基础和交叉学科中核心地位的一个缩影。

每一章介绍内容的意义不仅在于这些工作本身。相反，每一个被完成的工作都带来了更为广泛的可以研究的方向，其中有些相关的工作已经取得了初步的成果。笔者现在将开始展望这些工作对应的研究方向在未来有望取得哪些激动人心的进展。概括地说：

1. 在互文性与 Bell 非定域性的关系方面，我们尚不知道超越非定域性的互文性和互文浓缩能够在量子计算等方面取得哪些作用。当前阶段的量子计算原型机几乎都是运行在量子比特系统上，使用线路模型描述其机理。但是高维量子系统已经在一些量子信息任务中，例如生成超越量子比特的随机性 [198] 等方面展现了优势。那么高维量子系统是否可能用于构成某些量子算法的一个子流程（例如魔术态萃取）呢？我们知道 Clifford 互文性是进行量子计算的资源，是否对于 Clifford 互文性也存在着互文超越非定域和互文浓缩的现象，从而可以使用高维系统代替多个量子比特系统，以降低魔术态萃取过程的资源消耗？
2. 如何找到更多的互文浓缩案例？已知的案例非常稀少，实际上我们不知道这是一个普遍存在的机制，还是只是 Clifford 代数导致的一个特殊现象。笔者可以证明，在第 5 章中给出的每一个可以用于图态验证的“全对无”佯谬算符，都能够构造出包含互文浓缩现象的 Bell 不等式。但是，这些不等式都不是最强的图态不等式 [145]，而最强的不等式即使全都使用 Clifford 代数构造出来，也不一定能进行互文浓缩——需要从中间扔掉一些项，牺牲定域隐变量不等式的违背程度，才能得到可浓缩的不等式。要发现更多的互文浓缩案例，并进一步发掘其应用，就需要能够系统性地搜寻可能有类似现象的 Bell 不等式，也就是需要发展秩受限的半正定规划等数学工具。这些工具将可以在维度目击 [131] 等应用中发挥作用。
3. 在“全对无”佯谬的研究方面，能否找到这类佯谬在量子信息和量子计算领

域进一步的应用？尤其是随着量子通信技术的发展，“全对无”佯谬在该方向应当能够取得一定的应用。例如 Brassard et al. [199] 发现 Peres–Mermin 方块可以用来实现量子遥感，降低通信复杂度，类似的技术是否能够在实际的通信场景中发挥作用？另一个倾向于基础科学研究的问题：是否能够在找到更强、更反直觉、抗噪声等性质更优秀的“全对无”佯谬？例如 GHZ 佯谬的 4 个公式乘积出现一个矛盾，Peres–Mermin 方块的 6 个公式乘积才出现一个矛盾。有没有可能进一步减小需要使用的公式数量，例如用 3 个公式就给出一个矛盾的概率分布？这个问题已经有了答案：笔者可以证明，三段论式的“全对无”佯谬是存在的，但是目前已知最简单的三段论式“全对无”佯谬的检验需要一个 37 维的系统，因此又为干涉仪实验技术的进一步发展提出了挑战。

4. 量子柴郡猫效应是否有可能提供对于前-后选择型实验中弱值这一概念的物理本质的新理解？弱值是用于描述这类系统的一个非常自然的语言，而且已经从当年玩具模型参数的角色进化到被用于波前传感 [119]、精密传感 [200] 等实际任务中。然而，由于其过于奇异的性质，在文献中该概念饱受批判。在追踪光子和追踪自旋位置等实验中，即使不将弱值非零作为粒子或属性到达过哪里的标志，弱值理论能够给出的预言完全能够被标准量子力学再现 [201]，而且有一些思想实验中给出了弱值理论不能够完美解释的例子 [202]。因此，在多大的程度上，一阶弱值就能够对应物理本质，是一个值得进一步研究的问题。这个研究可能会为量子力学一个较为直观和统一的诠释做出贡献。
5. 有没有可能在拓扑系统中以魔术态萃取之外的方式进行互文性驱动的量子计算？拓扑系统中获取准粒子本身就是一个困难的事情，该系统需要实现量子比特数从 0 到 1 的突破。类似基于测量的量子计算、魔术态萃取等资源消耗量极高的操作也许都不是近期可以实现的任务。事实上，已经知道使用半磁通子和仲费米子 [185] 以及仲费米子之间的相互作用 [203] 可以生成 non-Clifford 门操作，那么在方案中应当如何将互文性利用起来？
6. 如何将互文性用于近期量子计算？即使我们已经知道使用魔术态萃取有望实现通用量子计算，其所需的量子比特数都不是目前中等规模含噪量子 (NISQ = noisy intermediate-scale quantum) [204] 系统所能够提供的。互文性可以说是量子计算中最难被经典计算机复现的性质 [83]，那么是否有可能使用变分量子算法 [205] 等方式，辅以经典机器学习的工具，将互文性加速量子计算的特点进一步地运用起来？在该方向的研究已经有了一定的进展 [206]，若能够使用线性光学等系统进行研究，将是一个非常有潜力的方向。

7. 最后,在线性光学系统之外,如何研究除了最简单情形(例如 Peres–Mermin 方块和 KCBS 实验)之外的量子互文性?这个问题的本质就是关于互文性在量子力学中本质的讨论。众所周知,单光子干涉实验中光子波函数的演化也可以被 Maxwell 方程组完美地再现出来,那么在线性光学系统中,实际上看到的互文性都不需要借助量子力学来解释;量子力学只是提供了一种可能用于解释的语言!因此,在线性光学平台之外发展其它能够研究互文性的实验平台将进一步推进人类对于量子力学本质的理解。目前,线性光学平台在实现可精确操控的高维系统方面几乎是人类唯一的选择,若能够发展其它具有编码高维量子信息能力的实验平台,则不仅能够使用这些平台研究互文性,避免除了量子力学之外其它可能的描述,从而真正使得“量子互文”这一称呼名正言顺,而且能将线性光学平台上已经得到概念验证的诸多结果直接转移到新的平台上,用于通用、容错、可扩展的量子计算等诸多任务中,使得互文性成为超越“魔术态萃取”的意义之上,真正助力人类算力进步的“魔术”。

笔者深知,由于本人水平有限,上面的展望必定是不全面,多有疏漏甚至偏颇的。然而,笔者希望藉由这篇论文能够激发读者在相应方向的思考和发现,最终推动互文性, quantum anything^①,乃至交叉科学的进一步发展。

^①这里借鉴了 Terry Rudolph 对自己工作的精彩概括。

附录 A 光量子信息实验的案例：实现量子信息掩蔽

在本附录中，我们展示如何将第 3 章中介绍的光学实验技术运用到具体场景中，从而实现一个理论方案：利用光子实现量子信息的掩蔽。自从 Modi et al. [207] 提出量子信息掩蔽概念以来，该方向近年来发展非常迅猛，因此诸多理论进展的研究不可能完全在本节之中涵盖。笔者谨向感兴趣该方向的读者推荐我们研究组撰写的综述文章 [208]。相反，本节的内容意在展现如何在光学平台上实现参量光方案的研究，希望能够尽可能提供一个光学实验从构思和分析价值，到实验设计，到数据采集，最后到寻找应用的全貌。

A.1 理论基础

量子信息掩蔽^①指的是对于单体态空间中一个子空间中的量子态 ρ_s^A 执行一个纠缠操作，使得量子信息扩散到两个量子比特的关联之中。当仅观察得到的两体量子态 ρ_s^{AB} 中的任何一个时，得不到原先子空间内的任何信息。确定复合系统中单个系统状态的操作是对整体的密度矩阵求偏迹：在上面的例子中，两体量子态的子系统 A 和 B 的状态分别是：

$$\tilde{\rho}_s^A = \text{Tr}^B \rho_s^{AB} := \sum_k \langle k | \rho_s^{AB} | k \rangle_B, \quad \tilde{\rho}_s^B = \text{Tr}^A \rho_s^{AB} := \sum_k \langle k | \rho_s^{AB} | k \rangle_A.$$

其中，求和 $|k\rangle$ 遍历下标对应系统的任意一组正交完备基。实现掩蔽操作就是实现一个线性映射 \mathcal{U} ，其作用效果为 $\rho_s^A \rightarrow \rho_s^{AB} = \mathcal{U} \rho_s^A \otimes |0\rangle\langle 0| \mathcal{U}^\dagger$ ， $s \in \{0, 1, 2, \dots\}$ 在该映射作用之后，

$$\tilde{\rho}_s^A = \tilde{\rho}_0^A, \quad \tilde{\rho}_s^B = \tilde{\rho}_0^B, \quad \forall s.$$

在最初的工作中，Modi et al. [207] 已经指出了量子信息掩蔽和量子秘密共享以及比特承诺之间的关系。因此，可以期待若能实现量子信息掩蔽，将能够在量子信息方面的研究中展现一定的价值。然而，Modi 等人同时指出，不可能对于整个态空间进行量子信息掩蔽。根据理论研究的结果，对于该方向的实验研究应该关注的问题，同时也是应该期待解决的困难，应当是：

- 如何实现对于一个态空间子集中量子态的掩蔽；
- 可掩蔽子集的性质，例如在态空间中的几何分布；以及
- 掩蔽有限态空间中信息所能够取得的应用。

在理论方案提出后不久，Liang et al. [209] 就指出对于量子比特情况下，可掩蔽集可以被求解：同时可被掩蔽的量子态的密度矩阵在 Bloch 球上构成一个圆

^①这里我们只考虑仅使用一个辅助系统的两体量子信息掩蔽。接下来我都省去前面的定语。

盘。一个最普遍的量子比特可掩蔽集可以表示为：

$$\mathcal{D}_\alpha^\theta(\rho_0) = \{\rho : x \sin \alpha \cos \theta + y \sin \alpha \sin \theta + z \cos \alpha = c\},$$

其中， $c = x_0 \sin \alpha \cos \theta + y_0 \sin \alpha \sin \theta + z_0 \cos \alpha$ ， $\alpha \in [0, \pi]$ and $\theta \in [0, 2\pi]$ 。而对应这个可掩蔽集的掩蔽操作形式则可以写为：

$$\mathcal{U}_\alpha^\theta = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) & 0 & e^{-i\theta} \sin(\alpha/2) & 0 \\ 0 & \cos(\alpha/2) & 0 & e^{-i\theta} \sin(\alpha/2) \\ 0 & \sin(\alpha/2) & 0 & -e^{-i\theta} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) & 0 & -e^{-i\theta} \cos(\alpha/2) & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

A.2 实验光路的设计

现在有了理论上实现两体量子信息掩蔽的数学方法指导，就可以开始考虑如何将其在线性光学平台上构造出来。一个范式性的思考过程如下：

1. 首先考虑在哪个自由度下实现。答案应当是偏振，因为目前只有偏振自由度能够借助符合计数实现两光子的纠缠门操作。
2. 其次，注意到因为通过波片的组合，可以实现单个偏振量子比特的任意么正操作，而么正操作在 Bloch 球上对应为旋转，圆盘旋转后仍然是圆盘。因此，只需实现任何一个掩蔽操作 $\mathcal{U}_\alpha^{\theta*}$ ，就可以辅以偏振量子比特的旋转，将该掩蔽操作提升为可以实现任意的掩蔽操作。
3. 现在考虑特殊的 α^* 和 θ^* 应当如何选取。我们发现当取 $\alpha = 0, \theta = \pi$ 时，

$$\mathcal{U}_0^\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{CNOT}.$$

这样至少通过 CZ 门和 Harnard 门的组合，就可以实现掩蔽操作，而前面已经知道如何实现最困难的 CZ 门了。

4. 最后，由于受控量子态 $|0\rangle\langle 0|$ 是固定的，因此还可以考虑如何进一步优化实验的设计，从而降低 CZ 门对虚时演化精度的依赖。通过比较熔接门和 CNOT 门对于四个可能的输入算符的映射，我们发现它们只差控制光子为竖直偏振时的一个负号。尝试替换后发现，熔接门加上一个作用在辅助量子比特上的 Hadamard 门 $H = (\sigma_x + \sigma_z)/\sqrt{2}$ 实现的功能就等于 \mathcal{U}_0^0 。因此，我们使用元件最少的熔接门作为量子信息掩蔽光路的核心。

最终，我们设计的实现偏振编码量子比特在线性光学下量子信息掩蔽的光路如图 A.1 所示。通过泵浦一个 II 型 beam-like 非线性晶体，产生一对偏振处于

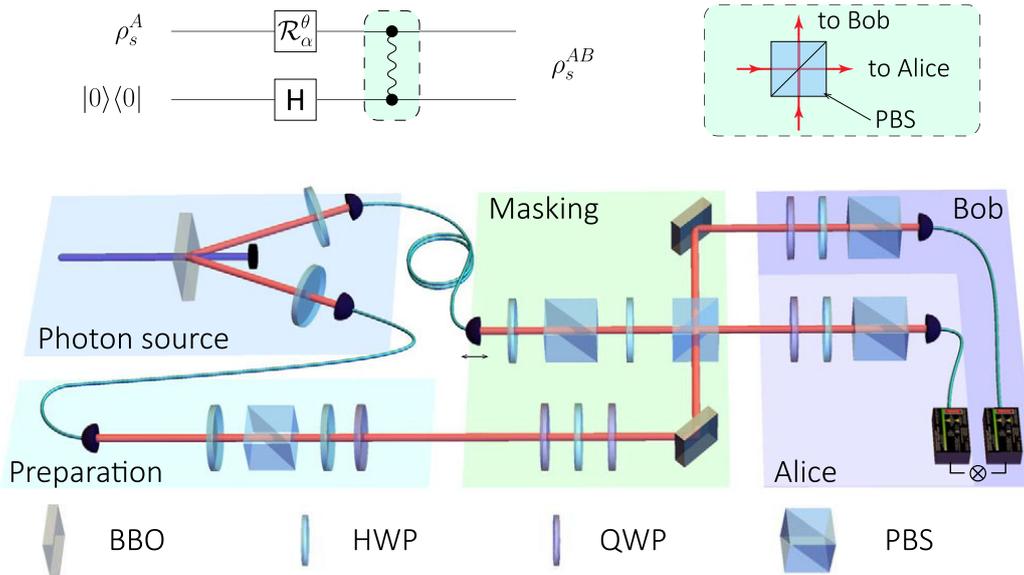


图 A.1 线性光学下量子信息掩蔽的实现。上图：实现量子信息掩蔽的线路图，其中虚线部分标出熔接门及其光学实现。下图：整个实验装置图，包含初态制备、偏振量子比特的任意么正旋转、熔接和符合探测四个部分。

直积态的光子，将其中一个作为辅助光子，使用半波片加上一个 Hadamard 操作，从而使其偏振处于计算基矢的最大叠加态 $|D\rangle$ 。另一个光子使用偏振分束镜向 $|H\rangle$ 投影后，使用一个半波片和一个四分之一波片制备到任意的偏振态上。接下来进入掩蔽操作的部分，首先使用一个波片组选取待掩蔽的量子态集合，将该集合转到 $\langle\sigma_z\rangle$ 为相同值的 Bloch 球的纬线平面上。其次使用熔接门实现两个光子的干涉，这样输出的光子对应两边分别输出一个光子的部分就已经实现了量子信息的掩蔽。为了恢复这一部分信息，我们使用两个偏振分析装置和符合探测，实现两光子偏振量子比特的联合测量。

A.3 实验结果的刻画

当我们完成了实验装置之后，应当测量哪些数据呢？为了明确体现装置的工作原理，并且清晰地展示工作效果，我们需要从定性和定量两个方面来描述掩蔽机的功效。其中，“定性”指的是可以直观地再现理论结果的关键预言，在量子信息掩蔽这个例子中，最关键的预言就是可掩蔽集合的几何形式以及掩蔽后的单体态不携带任何子空间中的信息；“定量”指的是可以具体地给出实验装置的表现，在这里可以研究的是掩蔽操作的保真度、掩蔽后得到的两体态的形式、以及掩蔽操作效果的鲁棒性等。

分析上述两个方面后，我们可以将所需的数据大致分为两个部分：

1. 掩蔽操作中量子态的演化。具体来说，包括被掩蔽的量子态在掩蔽操作前

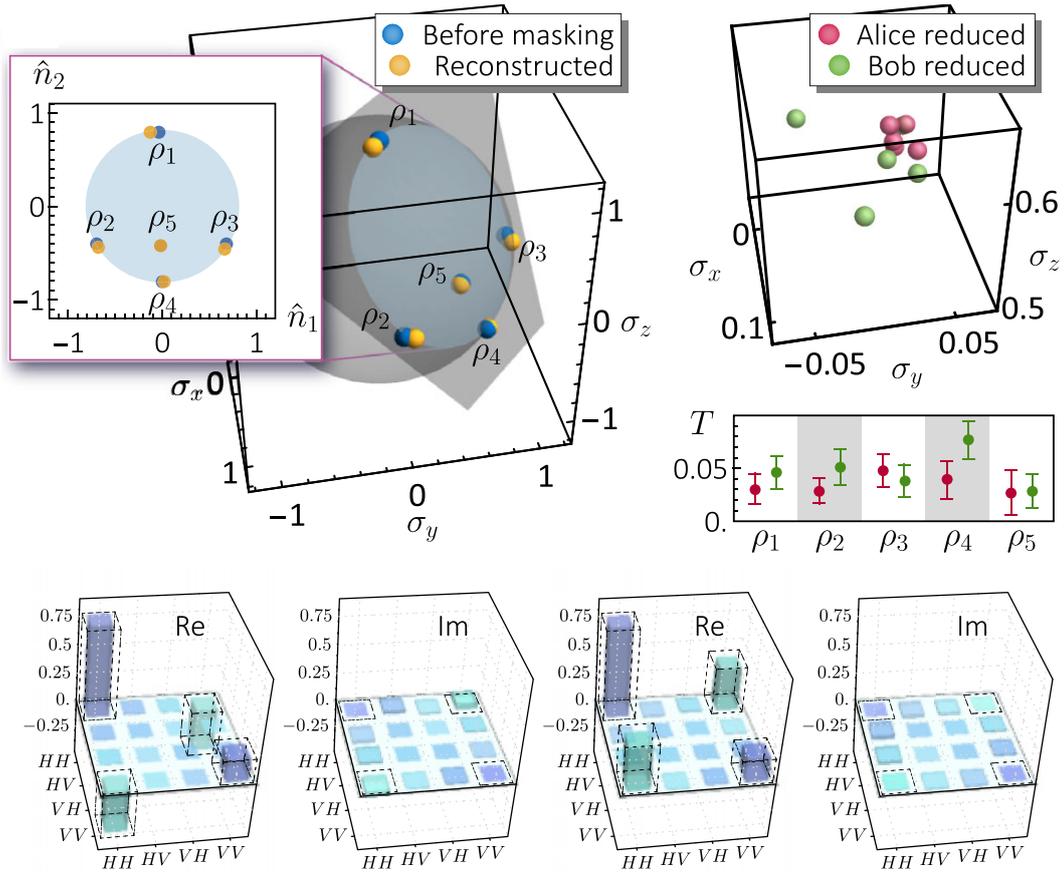


图 A.2 掩蔽操作中量子态的演化。可掩蔽圆盘是平面 $x + y + 1 = 1$ 和单位球的交点。左上图：可掩蔽圆盘上的纯态 $\rho_1 \sim \rho_4$ 和混态 ρ_5 。蓝色和橙色点分别表示从量子态层析重构的初态和末态。插图显示了这些量子态在可掩蔽圆盘上的投影，其横轴和纵轴坐标分别是 $(-\hat{x} + \hat{y})/\sqrt{2}$ 和 $(-\hat{x} - \hat{y} + 2\hat{z})/\sqrt{6}$ 。右上图：掩蔽后实验测得的单体约化态，以及与其理论值的迹距离。下图：掩蔽 ρ_1 和 ρ_4 得到的两体密度矩阵。实线和虚线分别表示实验值和理论预测。

后的密度矩阵。对于掩蔽前的量子态，从几何形式的角度，给出与理论预言的可掩蔽集合的对比结果。对于掩蔽后的量子态，给出 (1) 两个单体密度矩阵 $\tilde{\rho}_s^{A/B}$ 的形式，以及与各自理论结果 $\tilde{\rho}_0^{A/B}$ 的偏差。为配合几何形式的表述，使用迹距离来刻画偏差，其定义为：

$$T(\rho, \rho') := \frac{1}{2} \|\rho - \rho'\|_1 = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\sqrt{(\rho - \rho')^\dagger (\rho - \rho')} \right],$$

从而借助 $T(\tilde{\rho}_s^{A/B}, \tilde{\rho}_0^{A/B}) \rightarrow 0$ 说明单体量子态完全不携带子空间中的任何信息。(2) 两体密度矩阵的形式和按照掩蔽的逆操作进行数值计算后恢复出的先前态的信息，从而说明信息完全被保存在两体关联之中。

2. 掩蔽操作对于量子态扰动的响应。具体来说，包括被掩蔽的量子态在可掩

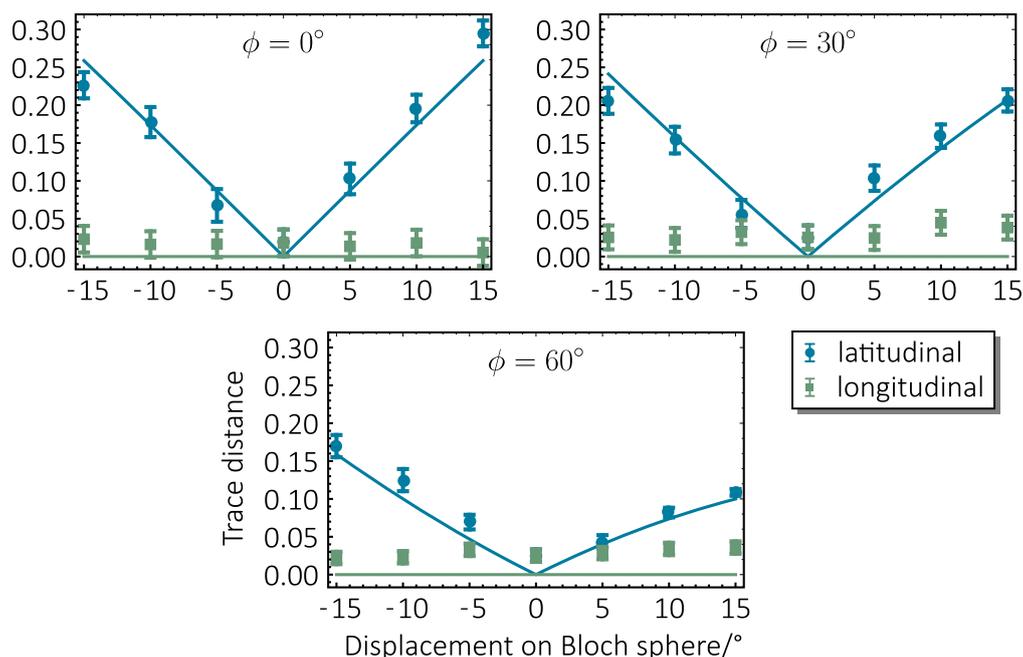


图 A.3 掩蔽操作对于量子态扰动的响应。可掩蔽圆盘被 Bloch 球上的纬线 ϕ 包围。每个图都表示将初始状态从参考点略微移开时，单体约化密度矩阵与参考状态的迹距离。对应 Bloch 球上沿经线和纬线位移的情况分别标记为绿色和青色点（实验数据）和曲线（理论值）。误差棒对应于泊松 (Poissonian) 计数统计估计的 1σ 标准偏差。

蔽子集内和向可掩蔽子集外移动时，单体密度矩阵与参考值的变化。计算出理论曲线，与实验数据点相比较，从而与可掩蔽集合的几何性质进行对应。为了清晰起见，选择实现的掩蔽操作为 \mathcal{U}_0^0 ，这样可掩蔽集合就是 Bloch 球的纬线平面 $\phi = \text{const.}$ ，离开可掩蔽集合的方向就是经线，方便直观理解和数据表述。

上面所述两部分所需的数据分别被表示在图 A.2 和图 A.3 中。另外，在论文中给出关键数据和计算结果，例如掩蔽后两体量子态和目标态的平均保真度为 97.7%，单体态与目标态的平均迹距离为 1.55×10^{-2} ，等。这样，不仅可以充分地将实验结果和理论预言形成对应，直接体现有效地实现了理论所要求的功能并验证了理论预期，而且可以给出大量定量结果，从而证明装置的高精度和有效性。

A.4 量子信息掩蔽的应用

当我们完成了初步的数据测量之后，应该如何发展装置在量子信息处理和量子通信等方面可能的应用呢？我们从装置所能实现的功能入手，结合理论工

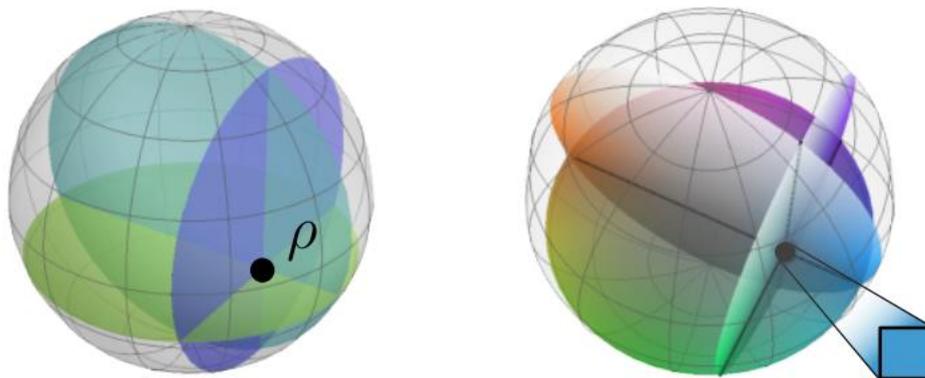


图 A.4 Bloch 球和颜色空间的同构性。在借助量子信息掩蔽实现秘密共享的实验中，发送掩蔽后的一部分约化态给三个不同的接收者，他们对比后就可以使得可掩蔽集几何表示中的三个圆盘相交在一点，从而恢复出先前的量子态。

作的指导来考虑该问题。Modi et al. [207] 的工作指出，量子信息掩蔽应该能够在量子秘密共享问题中展现一定的应用，并且 Liang et al. [209] 已经利用几何特点，构造出了一个实现秘密共享的方案。具体来说，操作是使用两个不同的掩蔽映射掩蔽同一个纯态，并且发送掩蔽后的一部分约化态给两个不同的接收者。每个接收者都不能单独得到掩蔽前量子态的任何信息，但是两个接收者对比后就可以使得可掩蔽集几何表示中的圆盘相交在一点，从而恢复出先前的量子态。

本装置较之前的理论预言相比，进一步实现了对于混态的掩蔽，这是从前的工作中没有研究过的，等于是将可掩蔽集合的范围从 Bloch 球面上的圆环扩大到了整个球中的圆盘。因此，可以围绕这一点进一步发展应用。具体来说，注意到单位球可以用来编码所有的颜色，因为描述任意的颜色也只需要三个参数，且该参数空间与单位球具有相同的拓扑结构，如图 A.4 所示。具体的对应关系在维基百科等网站都能够查到。因此，一个非常直观的概念验证性的应用就是用一些量子态编码颜色，然后依次加密和还原这些量子态，相当于逐个像素地传递了一

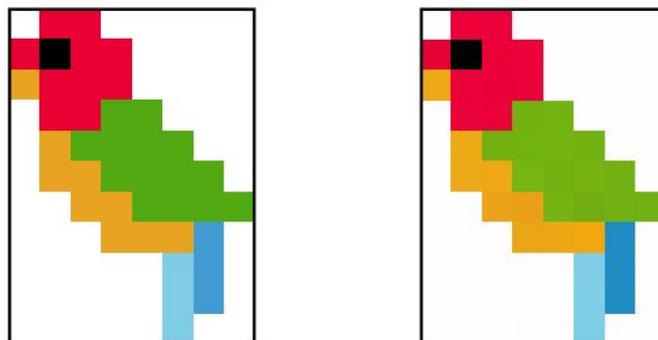


图 A.5 使用秘密共享协议分享一个彩色图片。左图和右图分别为原始图片和接收方恢复出的图片。

副图片。具体每一步实现起来，就是用三个不同的掩蔽映射作用同一个量子态上，只利用符合探测中一边的光子计算单体约化态，从而确定圆盘的位置；再通过经典通信比较三个圆盘的坐标，将原先的量子态还原出来。利用这种方法，我们展示了一个例子：对于图 A.5 中一副小鸟图片的分享和安全传输。

参考文献

- [1] SHOR P W. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer[J]. SIAM review, 1999, 41(2): 303-332.
- [2] ARUTE F, ARYA K, BABBUSH R, et al. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor[J]. Nature, 2019, 574(7779): 505-510.
- [3] ARRAZOLA J, BERGHOLM V, BRÁDLER K, et al. Quantum circuits with many photons on a programmable nanophotonic chip[J]. Nature, 2021, 591(7848): 54-60.
- [4] MERMIN N D. Hidden variables and the two theorems of John Bell[J]. Reviews of Modern Physics, 1993, 65(3): 803.
- [5] BOHM D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables. i[J]. Physical Review, 1952, 85(2): 166.
- [6] EINSTEIN A, PODOLSKY B, ROSEN N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?[J]. Physical Review, 1935, 47(10): 777.
- [7] SPEKKENS R W. Contextuality for preparations, transformations, and unsharp measurements[J]. Physical Review A, 2005, 71(5): 052108.
- [8] FINE A. Hidden variables, joint probability, and the Bell inequalities[J]. Physical Review Letters, 1982, 48(5): 291.
- [9] MEYER D A. Finite precision measurement nullifies the Kochen–Specker theorem[J]. Physical Review Letters, 1999, 83(19): 3751.
- [10] KENT A. Noncontextual hidden variables and physical measurements[J]. Physical Review Letters, 1999, 83(19): 3755.
- [11] CLIFTON R, KENT A. Simulating quantum mechanics by non-contextual hidden variables [J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2000, 456(2001): 2101-2114.
- [12] HASEGAWA Y, LOIDL R, BADUREK G, et al. Violation of a Bell-like inequality in single-neutron interferometry[J]. Nature, 2003, 425(6953): 45-48.
- [13] BARTOSIK H, KLEPP J, SCHMITZER C, et al. Experimental test of quantum contextuality in neutron interferometry[J]. Physical Review Letters, 2009, 103(4): 040403.
- [14] CABELLO A. Experimentally testable state-independent quantum contextuality[J]. Physical Review Letters, 2008, 101(21): 210401.
- [15] CABELLO A, KLEINMANN M, BUDRONI C. Necessary and sufficient condition for quantum state-independent contextuality[J]. Physical Review Letters, 2015, 114(25): 250402.
- [16] GLEASON A M. Measures on the closed subspaces of a Hilbert space[J]. Journal of Math-

- ematics and Mechanics, 1957, 6: 885-893.
- [17] KOCHEN S, SPECKER E. The problem of hidden variables in quantum mechanics[J]. Journal of Mathematics and Mechanics, 1967, 17: 59-87.
- [18] PERES A. Two simple proofs of the Kochen–Specker theorem[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1991, 24(4): L175.
- [19] CABELLO A, ESTEBARANZ J, GARCÍA-ALCAINE G. Bell–Kochen–Specker theorem: A proof with 18 vectors[J]. Physics Letters A, 1996, 212(4): 183-187.
- [20] YU S, OH C H. State-independent proof of Kochen–Specker theorem with 13 rays[J]. Physical Review Letters, 2012, 108(3): 030402.
- [21] CABELLO A, SEVERINI S, WINTER A. Graph-theoretic approach to quantum correlations [J]. Physical Review Letters, 2014, 112(4): 040401.
- [22] HOWARD M, WALLMAN J, VEITCH V, et al. Contextuality supplies the ‘magic’ for quantum computation[J]. Nature, 2014, 510(7505): 351-355.
- [23] XU Z P, CHEN J L, GÜHNE O. Proof of the Peres conjecture for contextuality[J]. Physical Review Letters, 2020, 124(23): 230401.
- [24] HUANG Y F, LI C F, ZHANG Y S, et al. Experimental test of the Kochen–Specker theorem with single photons[J]. Physical Review Letters, 2003, 90(25): 250401.
- [25] KIRCHMAIR G, ZÄHRINGER F, GERRITSMA R, et al. State-independent experimental test of quantum contextuality[J]. Nature, 2009, 460(7254): 494-497.
- [26] AMSELEM E, RÅDMARK M, BOURENNANE M, et al. State-independent quantum contextuality with single photons[J]. Physical Review Letters, 2009, 103(16): 160405.
- [27] D’AMBROSIO V, HERBAUTS I, AMSELEM E, et al. Experimental implementation of a Kochen–Specker set of quantum tests[J]. Physical Review X, 2013, 3(1): 011012.
- [28] HU X M, CHEN J S, LIU B H, et al. Experimental test of compatibility-loophole-free contextuality with spatially separated entangled qutrits[J]. Physical Review Letters, 2016, 117(17): 170403.
- [29] WANG P, ZHANG J, LUAN C Y, et al. Significant-loophole-free test of Kochen–Specker contextuality using two species of atomic-ions[J]. Science Advances, 2021, 8: eabk1660.
- [30] KOK P, MUNRO W J, NEMOTO K, et al. Linear optical quantum computing with photonic qubits[J]. Reviews of modern physics, 2007, 79(1): 135.
- [31] BARTLETT B, DUTT A, FAN S. Deterministic photonic quantum computation in a synthetic time dimension[J]. Optica, 2021, 8(12): 1515-1523.
- [32] YOKOYAMA S, UKAI R, ARMSTRONG S C, et al. Ultra-large-scale continuous-variable cluster states multiplexed in the time domain[J]. Nature Photonics, 2013, 7(12): 982-986.
- [33] LARSEN M V, GUO X, BREUM C R, et al. Deterministic generation of a two-dimensional

- cluster state[J]. *Science*, 2019, 366(6463): 369-372.
- [34] RAUSSENDORF R, BRIEGEL H J. A one-way quantum computer[J]. *Physical Review Letters*, 2001, 86(22): 5188.
- [35] SCHRÖDINGER E. Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik[J]. *Naturwissenschaften*, 1935, 23(50): 844-849.
- [36] NIELSEN M A, CHUANG I. *Quantum computation and quantum information*[M]. Cambridge University Press, 2000.
- [37] BERGHOLTZ E J, BUDICH J C, KUNST F K. Exceptional topology of non-Hermitian systems[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2021, 93(1): 015005.
- [38] WICK G C. Properties of Bethe–Salpeter wave functions[J]. *Physical Review*, 1954, 96(4): 1124.
- [39] KLYACHKO A A, CAN M A, BINICIOĞLU S, et al. Simple test for hidden variables in spin-1 systems[J]. *Physical Review Letters*, 2008, 101(2): 020403.
- [40] LIU B, HUANG Y, GONG Y, et al. Experimental demonstration of quantum contextuality with nonentangled photons[J]. *Physical Review A*, 2009, 80(4): 044101.
- [41] BUDRONI C, CABELLO A, GÜHNE O, et al. Quantum contextuality[J]. arXiv preprint arXiv:2102.13036, 2021.
- [42] BHARTI K, RAY M, VARVITSIOTIS A, et al. Robust self-testing of quantum systems via noncontextuality inequalities[J]. *Physical Review Letters*, 2019, 122(25): 250403.
- [43] LOVÁSZ L, SAKS M, SCHRIJVER A. Orthogonal representations and connectivity of graphs[J]. *Linear Algebra and its applications*, 1989, 114: 439-454.
- [44] LOVÁSZ L. On the Shannon capacity of a graph[J]. *IEEE Transactions on Information theory*, 1979, 25(1): 1-7.
- [45] CABELLO A. Simple method for experimentally testing any form of quantum contextuality [J]. *Physical Review A*, 2016, 93(3): 032102.
- [46] XIAO Y, XU Z P, LI Q, et al. Experimental observation of quantum state-independent contextuality under no-signaling conditions[J]. *Optics Express*, 2018, 26(1): 32-50.
- [47] SPEKKENS R W, BUZACOTT D H, KEEHN A J, et al. Preparation contextuality powers parity-oblivious multiplexing[J]. *Physical review letters*, 2009, 102(1): 010401.
- [48] SCHMID D, SPEKKENS R W. Contextual advantage for state discrimination[J]. *Physical Review X*, 2018, 8(1): 011015.
- [49] GÜHNE O, BUDRONI C, CABELLO A, et al. Bounding the quantum dimension with contextuality[J]. *Physical Review A*, 2014, 89(6): 062107.
- [50] UM M, ZHAO Q, ZHANG J, et al. Randomness expansion secured by quantum contextuality [J]. *Physical Review Applied*, 2020, 13(3): 034077.

- [51] LIM H, ZHANG X, LIU W Z, et al. Experimental realization of device-independent quantum randomness expansion[J]. *Physical Review Letters*, 2021, 126(5): 050503.
- [52] HARRIGAN N, SPEKKENS R W. Einstein, incompleteness, and the epistemic view of quantum states[J]. *Foundations of Physics*, 2010, 40(2): 125-157.
- [53] LEIFER M S, MARONEY O J. Maximally epistemic interpretations of the quantum state and contextuality[J]. *Physical Review Letters*, 2013, 110(12): 120401.
- [54] PUSEY M F, BARRETT J, RUDOLPH T. On the reality of the quantum state[J]. *Nature Physics*, 2012, 8(6): 475-478.
- [55] BARRETT J, CAVALCANTI E G, LAL R, et al. No ψ -epistemic model can fully explain the indistinguishability of quantum states[J]. *Physical Review Letters*, 2014, 112(25): 250403.
- [56] RINGBAUER M, DUFFUS B, BRANCIARD C, et al. Measurements on the reality of the wavefunction[J]. *Nature Physics*, 2015, 11(3): 249-254.
- [57] PEARL J. *Causality*[M]. Cambridge university press, 2009.
- [58] CAVALCANTI E G. Classical causal models for Bell and Kochen–Specker inequality violations require fine-tuning[J]. *Physical Review X*, 2018, 8(2): 021018.
- [59] PEARL J, CAVALCANTI E. Classical causal models cannot faithfully explain Bell nonlocality or Kochen–Specker contextuality in arbitrary scenarios[J]. *Quantum*, 2021, 5: 518.
- [60] ALLEN J M A, BARRETT J, HORSMAN D C, et al. Quantum common causes and quantum causal models[J]. *Physical Review X*, 2017, 7(3): 031021.
- [61] VAIDMAN L, AHARONOV Y, ALBERT D Z. How to ascertain the values of σ_x , σ_y , and σ_z of a spin-1/2 particle[J]. *Physical Review Letters*, 1987, 58(14): 1385.
- [62] AHARONOV Y, COLOMBO F, POPESCU S, et al. Quantum violation of the pigeonhole principle and the nature of quantum correlations[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2016, 113(3): 532-535.
- [63] AHARONOV Y, POPESCU S, ROHRLICH D, et al. Quantum Cheshire cats[J]. *New Journal of Physics*, 2013, 15(11): 113015.
- [64] MERMIN N D. Limits to quantum mechanics as a source of magic tricks: Retrodiction and the Bell-Kochen–Specker theorem[J]. *Physical Review Letters*, 1995, 74(6): 831.
- [65] LEIFER M S, SPEKKENS R W. Pre-and post-selection paradoxes and contextuality in quantum mechanics[J]. *Physical Review Letters*, 2005, 95(20): 200405.
- [66] YU S, OH C. Quantum pigeonhole effect, Cheshire cat and contextuality[J]. *arXiv preprint arXiv:1408.2477*, 2014.
- [67] WAEGELL M, TOLLAKSEN J. Contextuality, pigeonholes, Cheshire cats, mean kings, and weak values[J]. *Quantum Studies: Mathematics and Foundations*, 2018, 5(2): 325-349.
- [68] BELL J S. On the Einstein–Podolsky–Rosen paradox[J]. *Physics Physique Fizika*, 1964, 1

- (3): 195.
- [69] HENSEN B, BERNIEN H, DRÉAU A E, et al. Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres[J]. *Nature*, 2015, 526(7575): 682-686.
- [70] GIUSTINA M, VERSTEEGH M A, WENGEROWSKY S, et al. Significant-loophole-free test of Bell's theorem with entangled photons[J]. *Physical Review Letters*, 2015, 115(25): 250401.
- [71] SHALM L K, MEYER-SCOTT E, CHRISTENSEN B G, et al. Strong loophole-free test of local realism[J]. *Physical Review Letters*, 2015, 115(25): 250402.
- [72] BELL TEST COLLABORATION B, et al. Challenging local realism with human choices[J]. *Nature*, 2018, 557(7704): 212-216.
- [73] CABELLO A. Bell's theorem without inequalities and without probabilities for two observers [J]. *Physical Review Letters*, 2001, 86(10): 1911.
- [74] CABELLO A. Converting contextuality into nonlocality[J]. *Physical Review Letters*, 2021, 127(7): 070401.
- [75] SADIQ M, BADZIĄG P, BOURENNANE M, et al. Bell inequalities for the simplest exclusivity graph[J]. *Physical Review A*, 2013, 87(1): 012128.
- [76] GREENBERGER D M, HORNE M A, ZEILINGER A. Going beyond Bell's theorem[M]// *Bell's theorem, quantum theory and conceptions of the universe*. Springer, 1989: 69-72.
- [77] HARDY L. Nonlocality for two particles without inequalities for almost all entangled states [J]. *Physical Review Letters*, 1993, 71(11): 1665.
- [78] BRAUNSTEIN S L, VAN LOOCK P. Quantum information with continuous variables[J]. *Reviews of modern physics*, 2005, 77(2): 513.
- [79] SPEKKENS R W. Negativity and contextuality are equivalent notions of nonclassicality[J]. *Physical Review Letters*, 2008, 101(2): 020401.
- [80] BRIEGEL H J, RAUSSENDORF R. Persistent entanglement in arrays of interacting particles [J]. *Physical Review Letters*, 2001, 86(5): 910.
- [81] RAUSSENDORF R. Contextuality in measurement-based quantum computation[J]. *Physical Review A*, 2013, 88(2): 022322.
- [82] BRAVYI S, GOSSET D, KÖNIG R. Quantum advantage with shallow circuits[J]. *Science*, 2018, 362(6412): 308-311.
- [83] BRAVYI S, GOSSET D, KOENIG R, et al. Quantum advantage with noisy shallow circuits [J]. *Nature Physics*, 2020, 16(10): 1040-1045.
- [84] BRAVYI S, KITAEV A. Universal quantum computation with ideal Clifford gates and noisy ancillas[J]. *Physical Review A*, 2005, 71(2): 022316.
- [85] GOTTESMAN D. The heisenberg representation of quantum computers[J]. *arXiv preprint*

- quant-ph/9807006, 1998.
- [86] HAMILTON C S, KRUSE R, SANSONI L, et al. Gaussian boson sampling[J]. *Physical Review Letters*, 2017, 119(17): 170501.
- [87] ALTEPETER J B, JEFFREY E R, KWIAT P G. Photonic state tomography[J]. *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 2005, 52: 105-159.
- [88] O'BRIEN J L, PRYDE G, GILCHRIST A, et al. Quantum process tomography of a controlled-NOT gate[J]. *Physical Review Letters*, 2004, 93(8): 080502.
- [89] FLAMINI F, SPAGNOLO N, SCIARRINO F. Photonic quantum information processing: a review[J]. *Reports on Progress in Physics*, 2018, 82(1): 016001.
- [90] TAKEUCHI S. Beamlike twin-photon generation by use of type II parametric downconversion[J]. *Optics Letters*, 2001, 26(11): 843-845.
- [91] ZHANG C, HUANG Y F, ZHANG C J, et al. Generation and applications of an ultrahigh-fidelity four-photon Greenberger–Horne–Zeilinger state[J]. *Optics Express*, 2016, 24(24): 27059-27069.
- [92] DREVER R, HALL J L, KOWALSKI F, et al. Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator[J]. *Applied Physics B*, 1983, 31(2): 97-105.
- [93] HU X M, XING W B, LIU B H, et al. Efficient generation of high-dimensional entanglement through multipath down-conversion[J]. *Physical Review Letters*, 2020, 125(9): 090503.
- [94] LI L, LIU Z, REN X, et al. Metalens-array-based high-dimensional and multiphoton quantum source[J]. *Science*, 2020, 368(6498): 1487-1490.
- [95] XU X Y, WANG Q Q, PAN W W, et al. Measuring the winding number in a large-scale chiral quantum walk[J]. *Physical Review Letters*, 2018, 120(26): 260501.
- [96] ECKER S, BOUCHARD F, BULLA L, et al. Overcoming noise in entanglement distribution [J]. *Physical Review X*, 2019, 9(4): 041042.
- [97] ALLEN L, BEIJERSBERGEN M W, SPREEUW R, et al. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre–Gaussian laser modes[J]. *Physical Review A*, 1992, 45 (11): 8185.
- [98] MARRUCCI L, MANZO C, PAPARO D. Optical spin-to-orbital angular momentum conversion in inhomogeneous anisotropic media[J]. *Physical Review Letters*, 2006, 96(16): 163905.
- [99] ENGLERT B G, KURTSIEFER C, WEINFURTER H. Universal unitary gate for single-photon two-qubit states[J]. *Physical Review A*, 2001, 63(3): 032303.
- [100] BROWNE D E, RUDOLPH T. Resource-efficient linear optical quantum computation[J]. *Physical Review Letters*, 2005, 95(1): 010501.
- [101] BODIYA T, DUAN L M. Scalable generation of graph-state entanglement through realistic linear optics[J]. *Physical Review Letters*, 2006, 97(14): 143601.

- [102] WANG K, ZHAN X, BIAN Z, et al. Experimental investigation of the stronger uncertainty relations for all incompatible observables[J]. *Physical Review A*, 2016, 93(5): 052108.
- [103] BOLDUC E, BENT N, SANTAMATO E, et al. Exact solution to simultaneous intensity and phase encryption with a single phase-only hologram[J]. *Optics letters*, 2013, 38(18): 3546-3549.
- [104] WOOTTERS W K, ZUREK W H. A single quantum cannot be cloned[J]. *Nature*, 1982, 299 (5886): 802-803.
- [105] XU J S, YUNG M H, XU X Y, et al. Demon-like algorithmic quantum cooling and its realization with quantum optics[J]. *Nature Photonics*, 2014, 8(2): 113-118.
- [106] XU J S, SUN K, HAN Y J, et al. Simulating the exchange of Majorana zero modes with a photonic system[J]. *Nature Communications*, 2016, 7(1): 13194.
- [107] XU J S, SUN K, PACHOS J K, et al. Photonic implementation of Majorana-based berry phases[J]. *Science advances*, 2018, 4(10): eaat6533.
- [108] LANGFORD N K, WEINHOLD T, PREVEDEL R, et al. Demonstration of a simple entangling optical gate and its use in Bell-state analysis[J]. *Physical Review Letters*, 2005, 95(21): 210504.
- [109] KIESEL N, SCHMID C, WEBER U, et al. Linear optics controlled-phase gate made simple [J]. *Physical Review Letters*, 2005, 95(21): 210505.
- [110] OKAMOTO R, HOFMANN H F, TAKEUCHI S, et al. Demonstration of an optical quantum controlled-NOT gate without path interference[J]. *Physical Review Letters*, 2005, 95(21): 210506.
- [111] AHARONOV Y, ALBERT D Z, VAIDMAN L. How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100[J]. *Physical Review Letters*, 1988, 60(14): 1351.
- [112] DRESSEL J, MALIK M, MIATTO F M, et al. Colloquium: Understanding quantum weak values: Basics and applications[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2014, 86(1): 307.
- [113] TANG J S, WANG Y T, YU S, et al. Experimental investigation of the no-signalling principle in parity–time symmetric theory using an open quantum system[J]. *Nature Photonics*, 2016, 10(10): 642-646.
- [114] XIAO L, ZHAN X, BIAN Z, et al. Observation of topological edge states in parity–time-symmetric quantum walks[J]. *Nature Physics*, 2017, 13(11): 1117-1123.
- [115] XIAO L, DENG T, WANG K, et al. Non-Hermitian bulk–boundary correspondence in quantum dynamics[J]. *Nature Physics*, 2020, 16(7): 761-766.
- [116] XIAO Y, KEDEM Y, XU J S, et al. Experimental nonlocal steering of Bohmian trajectories [J]. *Optics Express*, 2017, 25(13): 14463-14472.

- [117] XIAO Y, WISEMAN H M, XU J S, et al. Observing momentum disturbance in double-slit “which-way” measurements[J]. *Science advances*, 2019, 5(6): eaav9547.
- [118] YANG M, LI Q, LIU Z H, et al. Experimental observation of an anomalous weak value without post-selection[J]. *Photonics Research*, 2020, 8(9): 1468-1474.
- [119] YANG M, XIAO Y, LIAO Y W, et al. Zonal reconstruction of photonic wavefunction via momentum weak measurement[J]. *Laser & Photonics Reviews*, 2020, 14(5): 1900251.
- [120] ZHENG Y, YANG M, LIU Z H, et al. Detecting momentum weak value: Shack–Hartmann versus a weak measurement wavefront sensor[J]. *Optics Letters*, 2021, 46(21): 5352-5355.
- [121] HONG C K, OU Z Y, MANDEL L. Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference[J]. *Physical Review Letters*, 1987, 59(18): 2044.
- [122] BENT N, QASSIM H, TAHIR A, et al. Experimental realization of quantum tomography of photonic qudits via symmetric informationally complete positive operator-valued measures [J]. *Physical Review X*, 2015, 5(4): 041006.
- [123] NAVASCUÉS M, PIRONIO S, ACÍN A. Bounding the set of quantum correlations[J]. *Physical Review Letters*, 2007, 98(1): 010401.
- [124] NAVASCUÉS M, GURYANOVA Y, HOBAN M J, et al. Almost quantum correlations[J]. *Nature Communications*, 2015, 6(1): 6288.
- [125] CLAUSER J F, HORNE M A, SHIMONY A, et al. Proposed experiment to test local hidden-variable theories[J]. *Physical Review Letters*, 1969, 23(15): 880.
- [126] MERMIN N D. Quantum mysteries refined[J]. *American Journal of Physics*, 1994, 62(10): 880-887.
- [127] QU D, KURZYŃSKI P, KASZLIKOWSKI D, et al. Experimental entropic test of state-independent contextuality via single photons[J]. *Physical Review A*, 2020, 101(6): 060101.
- [128] XIAO Y, XU Z P, LI Q, et al. Experimental test of quantum correlations from Platonic graphs [J]. *Optica*, 2018, 5(6): 718-722.
- [129] PÁL K F, VÉRTESI T. Maximal violation of a bipartite three-setting, two-outcome Bell inequality using infinite-dimensional quantum systems[J]. *Physical Review A*, 2010, 82(2): 022116.
- [130] CHAVES R, KUENG R, BRASK J B, et al. Unifying framework for relaxations of the causal assumptions in Bell’s theorem[J]. *Physical Review Letters*, 2015, 114(14): 140403.
- [131] RAY M, BODDU N G, BHARTI K, et al. Graph-theoretic approach to dimension witnessing [J]. *New Journal of Physics*, 2021, 23(3): 033006.
- [132] MERMIN N D. Extreme quantum entanglement in a superposition of macroscopically distinct states[J]. *Physical Review Letters*, 1990, 65(15): 1838.
- [133] ARDEHALI M. Bell inequalities with a magnitude of violation that grows exponentially with

- the number of particles[J]. *Physical Review A*, 1992, 46(9): 5375.
- [134] VIDICK T, WEHNER S. Does ignorance of the whole imply ignorance of the parts? large violations of noncontextuality in quantum theory[J]. *Physical Review Letters*, 2011, 107(3): 030402.
- [135] BRUNNER N, CAVALCANTI D, PIRONIO S, et al. Bell nonlocality[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2014, 86(2): 419.
- [136] AGUILAR E A, FARKAS M, MARTÍNEZ D, et al. Certifying an irreducible 1024-dimensional photonic state using refined dimension witnesses[J]. *Physical Review Letters*, 2018, 120(23): 230503.
- [137] PIERANGELI D, MARCUCCI G, CONTI C. Large-scale photonic Ising machine by spatial light modulation[J]. *Physical Review Letters*, 2019, 122(21): 213902.
- [138] LEE RODGERS J, NICEWANDER W A. Thirteen ways to look at the correlation coefficient [J]. *The American Statistician*, 1988, 42(1): 59-66.
- [139] CABELLO A, BADZIAG P, CUNHA M T, et al. Simple Hardy-like proof of quantum contextuality[J]. *Physical Review Letters*, 2013, 111(18): 180404.
- [140] ASAVANANT W, SHIOZAWA Y, YOKOYAMA S, et al. Generation of time-domain-multiplexed two-dimensional cluster state[J]. *Science*, 2019, 366(6463): 373-376.
- [141] LARSEN M V, GUO X, BREUM C R, et al. Deterministic multi-mode gates on a scalable photonic quantum computing platform[J]. *Nature Physics*, 2021, 17(9): 1018-1023.
- [142] MENICUCCI N C. Temporal-mode continuous-variable cluster states using linear optics[J]. *Physical Review A*, 2011, 83(6): 062314.
- [143] GÜHNE O, TÓTH G, HYLLUS P, et al. Bell inequalities for graph states[J]. *Physical Review Letters*, 2005, 95(12): 120405.
- [144] TÓTH G, GÜHNE O, BRIEGEL H J. Two-setting Bell inequalities for graph states[J]. *Physical Review A*, 2006, 73(2): 022303.
- [145] CABELLO A, GÜHNE O, RODRÍGUEZ D. Mermin inequalities for perfect correlations[J]. *Physical Review A*, 2008, 77(6): 062106.
- [146] BACCARI F, AUGUSIAK R, ŠUPIĆ I, et al. Scalable Bell inequalities for qubit graph states and robust self-testing[J]. *Physical Review Letters*, 2020, 124(2): 020402.
- [147] CABELLO A. Stronger two-observer all-versus-nothing violation of local realism[J]. *Physical Review Letters*, 2005, 95(21): 210401.
- [148] SCARANI V, ACÍN A, SCHENCK E, et al. Nonlocality of cluster states of qubits[J]. *Physical Review A*, 2005, 71(4): 042325.
- [149] CHEN Z. Greenberger–Horne–Zeilinger theorem cannot be extended to a Bell state[J]. *Physical Review A*, 2003, 68(5): 052106.

- [150] HEIN M, EISERT J, BRIEGEL H J. Multiparty entanglement in graph states[J]. *Physical Review A*, 2004, 69(6): 062311.
- [151] SU Z E, TANG W D, WU D, et al. Experimental test of the irreducible four-qubit Greenberger–Horne–Zeilinger paradox[J]. *Physical Review A*, 2017, 95(3): 030103.
- [152] TANG W, YU S, OH C. Greenberger–Horne–Zeilinger paradoxes from qudit graph states[J]. *Physical Review Letters*, 2013, 110(10): 100403.
- [153] ADCOCK J C, MORLEY-SHORT S, DAHLBERG A, et al. Mapping graph state orbits under local complementation[J]. *Quantum*, 2020, 4: 305.
- [154] DIVINCENZO D P, SHOR P W. Fault-tolerant error correction with efficient quantum codes [J]. *Physical Review Letters*, 1996, 77(15): 3260.
- [155] CHEN Z B, PAN J W, ZHANG Y D, et al. All-versus-nothing violation of local realism for two entangled photons[J]. *Physical Review Letters*, 2003, 90(16): 160408.
- [156] RYFF L C. Bell and Greenberger, Horne, and Zeilinger theorems revisited[J]. *American Journal of Physics*, 1997, 65(12): 1197-1199.
- [157] CHEN J L, YE X J, WU C, et al. All-versus-nothing proof of Einstein–Podolsky–Rosen steering[J]. *Scientific reports*, 2013, 3(1): 1-5.
- [158] WISEMAN H M, JONES S J, DOHERTY A C. Steering, entanglement, nonlocality, and the Einstein–Podolsky–Rosen paradox[J]. *Physical Review Letters*, 2007, 98(14): 140402.
- [159] SUN K, XU J S, YE X J, et al. Experimental demonstration of the Einstein–Podolsky–Rosen steering game based on the all-versus-nothing proof[J]. *Physical Review Letters*, 2014, 113(14): 140402.
- [160] CARROLL L. Alice’s adventures in wonderland[M]. Maecenas Press, 1969.
- [161] DENKMAYR T, GEPPERT H, SPONAR S, et al. Observation of a quantum Cheshire cat in a matter-wave interferometer experiment[J]. *Nature Communications*, 2014, 5(1): 4492.
- [162] ATHERTON D P, RANJIT G, GERACI A A, et al. Observation of a classical Cheshire cat in an optical interferometer[J]. *Optics letters*, 2015, 40(6): 879-881.
- [163] ASHBY J M, SCHWARZ P D, SCHLOSSHAUER M. Observation of the quantum paradox of separation of a single photon from one of its properties[J]. *Physical Review A*, 2016, 94(1): 012102.
- [164] CORRÊA R, SANTOS M F, MONKEN C, et al. ‘quantum Cheshire cat’ as simple quantum interference[J]. *New Journal of Physics*, 2015, 17(5): 053042.
- [165] DAS D, PATI A K. Can two quantum Cheshire cats exchange grins?[J]. *New Journal of Physics*, 2020, 22(6): 063032.
- [166] 许小冶, 许金时, 李传锋. 两只“量子柴郡猫”笑脸的无接触交换[J]. *物理*, 2020, 49(9): 621-624.

- [167] PRYDE G, O'BRIEN J, WHITE A, et al. Measurement of quantum weak values of photon polarization[J]. *Physical Review Letters*, 2005, 94(22): 220405.
- [168] DANAN A, FARFURNIK D, BAR-AD S, et al. Asking photons where they have been[J]. *Physical Review Letters*, 2013, 111(24): 240402.
- [169] VAIDMAN L. Past of a quantum particle[J]. *Physical Review A*, 2013, 87(5): 052104.
- [170] FERRIE C, COMBES J. How the result of a single coin toss can turn out to be 100 heads[J]. *Physical Review Letters*, 2014, 113(12): 120404.
- [171] KIM Y, IM D G, KIM Y S, et al. Observing the quantum Cheshire cat effect with noninvasive weak measurement[J]. *npj Quantum Information*, 2021, 7(1): 1-6.
- [172] BENNETT C H, BRASSARD G, CRÉPEAU C, et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein–Podolsky–Rosen channels[J]. *Physical Review Letters*, 1993, 70(13): 1895.
- [173] CHOWDHURY P, PATI A K, CHEN J L. Wave and particle properties can be spatially separated in a quantum entity[J]. *Photonics Research*, 2021, 9(7): 1379-1383.
- [174] BARBIERI M, CINELLI C, MATALONI P, et al. Polarization-momentum hyperentangled states: Realization and characterization[J]. *Physical Review A*, 2005, 72(5): 052110.
- [175] FRANCO R L, COMPAGNO G. Indistinguishability of elementary systems as a resource for quantum information processing[J]. *Physical Review Letters*, 2018, 120(24): 240403.
- [176] FEYNMAN R P. Simulating physics with computers[M]//Feynman and computation. CRC Press, 2018: 133-153.
- [177] PRESKILL J. Fault-tolerant quantum computation[Z]. 1997.
- [178] KITAEV A Y. Unpaired Majorana fermions in quantum wires[J]. *Physics Uspekhi*, 2001, 44: 131.
- [179] KITAEV A Y. Fault-tolerant quantum computation by anyons[J]. *Annals of Physics (Amsterdam)*, 2003, 303(1): 2-30.
- [180] WEN X G. Non-abelian statistics in the fractional quantum hall states[J]. *Physical Review Letters*, 1991, 66: 802.
- [181] RAINIS D, LOSS D. Majorana qubit decoherence by quasiparticle poisoning[J]. *Physical Review B*, 2012, 85: 174533.
- [182] FENDLEY P. Parafermionic edge zero modes in \mathbb{Z}_n -invariant spin chains[J]. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2012, 2012(11): 11020.
- [183] TSUI D C, STORMER H L, GOSSARD A C. Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit[J]. *Physical Review Letters*, 1982, 48(22): 1559.
- [184] LAUGHLIN R B. Anomalous quantum Hall effect: an incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations[J]. *Physical Review Letters*, 1983, 50(18): 1395.

- [185] DUA A, MALOMED B, CHENG M, et al. Universal quantum computing with parafermions assisted by a half-fluxon[J]. *Physical Review B*, 2019, 100(14): 144508.
- [186] BARTOLOMEI H, KUMAR M, BISOGNIN R, et al. Fractional statistics in anyon collisions [J]. *Science*, 2020, 368(6487): 173-177.
- [187] NAKAMURA J, LIANG S, GARDNER G, et al. Direct observation of anyonic braiding statistics[J]. *Nature Physics*, 2020, 16: 931-936.
- [188] ASPURU-GUZIŁ A, WALTHER P. Photonic quantum simulators[J]. *Nature Physics*, 2012, 8: 285-291.
- [189] GEORGESCU I M, ASHHAB S, NORI F. Quantum simulation[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2014, 86: 153.
- [190] NOH J, SCHUSTER T, IADECOLA T, et al. Braiding photonic topological zero modes[J]. *Nature Physics*, 2020, 16: 985-993.
- [191] FRADKIN E, KADANOFF L P. Disorder variables and para-fermions in two-dimensional statistical mechanics[J]. *Nuclear Physics B*, 1980, 170(1): 1.
- [192] HUTTER A, LOSS D. Quantum computing with parafermions[J]. *Physical Review B*, 2016, 93: 125105.
- [193] PANCHARATNAM S. Generalized theory of interference and its applications[C]// *Proceedings of the Indian Academy of Sciences-Section A: volume 44*. Springer, 1956: 398-417.
- [194] BARGMANN V. Note on Wigner's theorem on symmetry operations[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1964, 5(7): 862-868.
- [195] SHOR P W. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory[J]. *Physical Review A*, 1995, 52(4): R2493.
- [196] GOTTESMAN D, KITAEV A, PRESKILL J. Encoding a qubit in an oscillator[J]. *Physical Review A*, 2001, 64(1): 012310.
- [197] HUANG H L, NAROŻNIAK M, LIANG F, et al. Emulating quantum teleportation of a Majorana zero mode qubit[J]. *Physical Review Letters*, 2021, 126(9): 090502.
- [198] GUO Y, CHENG S, HU X, et al. Experimental measurement-device-independent quantum steering and randomness generation beyond qubits[J]. *Physical Review Letters*, 2019, 123(17): 170402.
- [199] BRASSARD G, BROADBENT A, TAPP A. Quantum pseudo-telepathy[J]. *Foundations of Physics*, 2005, 35(11): 1877-1907.
- [200] YIN P, ZHANG W H, XU L, et al. Improving the precision of optical metrology by detecting fewer photons with biased weak measurement[J]. *Light: Science & Applications*, 2021, 10(1): 103.

- [201] CORRÊA R, SALDANHA P L. Apparent quantum paradoxes as simple interference: Quantum violation of the pigeonhole principle and exchange of properties between quantum particles[J]. Physical Review A, 2021, 104(1): 012212.
- [202] BHATI R S, et al. Do weak values capture the complete truth about the past of a quantum particle?[J]. Physics Letters A, 2022: 127955.
- [203] BENHEMOU A, ANGKHANAWIN T, ADAMS C S, et al. Universality of \mathbb{Z}_3 parafermions via edge mode interaction and quantum simulation of topological space evolution with Rydberg atoms[J]. arXiv preprint arXiv:2111.04132, 2021.
- [204] PRESKILL J. Quantum computing in the NISQ era and beyond[J]. Quantum, 2018, 2: 79.
- [205] PERUZZO A, MCCLEAN J, SHADBOLT P, et al. A variational eigenvalue solver on a photonic quantum processor[J]. Nature Communications, 2014, 5(1): 4213.
- [206] KIRBY W M, TRANTER A, LOVE P J. Contextual subspace variational quantum eigensolver [J]. Quantum, 2021, 5: 456.
- [207] MODI K, PATI A K, SEN A, et al. Masking quantum information is impossible[J]. Physical Review Letters, 2018, 120(23): 230501.
- [208] 刘正昊, 许金时, 李传锋. 量子信息掩蔽[J]. 光学学报, 2022, 42(3): 0327001.
- [209] LIANG X B, LI B, FEI S M. Complete characterization of qubit masking[J]. Physical Review A, 2019, 100(3): 030304.

在读期间发表的学术论文与取得的研究成果

已发表论文

- [1] **Zheng-Hao Liu**, Wei-Wei Pan, Xiao-Ye Xu, Mu Yang, Jie Zhou, Ze-Yu Luo, Kai Sun, Jing-Ling Chen, Jin-Shi Xu, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo, “Experimental exchange of grins between quantum Cheshire cats”. *Nature Communications* **11**, 3006 (2020).
- [2] **Zheng-Hao Liu**, Xiao-Bin Liang, Kai Sun, Qiang Li, Yu Meng, Mu Yang, Bo Li, Jing-Ling Chen, Jin-Shi Xu, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo, “Photonic implementation of quantum information masking”. *Physical Review Letters* **126**, 170505 (2021).
- [3] **Zheng-Hao Liu**, Kai Sun, Jiannis K. Pachos, Mu Yang, Yu Meng, Yu-Wei Liao, Qiang Li, Jun-Feng Wang, Ze-Yu Luo, Yi-Fei He, Dong-Yu Huang, Guang-Rui Ding, Jin-Shi Xu, Yong-Jian Han, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo, “Topological contextuality and anyonic statistics of photonic-encoded parafermions”. *PRX Quantum* **2**, 030323 (2021)
- [4] **Zheng-Hao Liu**, Jie Zhou, Hui-Xian Meng, Mu Yang, Qiang Li, Yu Meng, Hong-Yi Su, Jing-Ling Chen, Kai Sun, Jin-Shi Xu, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo, “Experimental test of the Greenberger–Horne–Zeilinger-type paradoxes in and beyond graph states”. *npj Quantum Information* **7**, 66 (2021).
- [5] **刘正昊**, 许金时, 李传锋, 《量子信息掩蔽》, 光学学报 **42**, 0327001 (2022).
- [6] **Zheng-Hao Liu**, Hui-Xian Meng, Zhen-Peng Xu, Jie Zhou, Sheng Ye, Qiang Li, Kai Sun, Hong-Yi Su, Adán Cabello, Jing-Ling Chen, Jin-Shi Xu, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo, “Experimental observation of quantum contextuality beyond Bell nonlocality”. *Physical Review A* **100**, 042118 (2019).
- [7] Kai Sun, **Zheng-Hao Liu**, Yan Wang, Ze-Yan Hao, Xiao-Ye Xu, Jin-Shi Xu, Chuan-Feng Li, Guang-Can Guo, Alessia Castellini, Ludovico Lami, Andreas Winter, Gerardo Adesso, Giuseppe Compagno, and Rosario Lo Franco, “Activation of indistinguishability-based quantum coherence for enhanced metrological applications with particle statistics imprint”. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **119**, e2119765119 (2022). (共同第一作者)
- [8] Mu Yang, **Zheng-Hao Liu**, Ze-Di Cheng, Jin-Shi Xu, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo, “Deep hybrid scattering image learning”. *Journal of Physics*

- D: Applied Physics* **52**, 115105 (2019). (共同第一作者)
- [9] Jun-Feng Wang, **Zheng-Hao Liu**, Fei-Fei Yan, Qiang Li, Xin-Ge Yang, Liping Guo, Xiong Zhou, Wei Huang, Jin-Shi Xu, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo, “Experimental optical properties of single nitrogen vacancy centers in silicon carbide at room temperature”. *ACS Photonics* **7**, 1611–1616 (2020).
- [10] Ze-Di Cheng, **Zheng-Hao Liu**, Qiang Li, Zheng-Wei Zhou, Jin-Shi Xu, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo, “Flexible degenerate cavity with ellipsoidal mirrors”. *Optics Letters* **44**, 5254 (2019).
- [11] Mu Yang, Qiang Li, **Zheng-Hao Liu**, Ze-Yan Hao, Chang-Liang Ren, Jin-Shi Xu, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo, “Experimental observation of an anomalous weak value without post-selection”. *Photonics Research* **8**, 1468 (2020).
- [12] Kai Sun, Yan Wang, **Zheng-Hao Liu**, Xiao-Ye Xu, Jin-Shi Xu, Chuan-Feng Li, Guang-Can Guo, Alessia Castellini, Farzam Nosrati, Giuseppe Compagno, Rosario Lo Franco, “Experimental quantum entanglement and teleportation by tuning remote spatial indistinguishability of independent photons”. *Optics Letters* **45**, 6410 (2020).
- [13] Yi Zheng, Mu Yang, **Zheng-Hao Liu**, Jin-Shi Xu, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo, “Detecting momentum weak value: Shack–Hartmann versus a weak measurement wavefront sensor”. *Optics Letters* **46**, 5352 (2021).
- [14] Yi Zheng, Mu Yang, **Zheng-Hao Liu**, Jin-Shi Xu, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo, “Toward practical weak measurement wavefront sensing: spatial resolution and achromatism”. *Optics Letters* **47**, 2734 (2022).
- [15] Ze-Di Cheng, Qiang Li, **Zheng-Hao Liu**, Fei-Fei Yan, Shang Yu, Jian-Shun Tang, Zheng-Wei Zhou, Jin-Shi Xu, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo, “Experimental implementation of a degenerate optical resonator supporting more than 46 Laguerre–Gaussian modes”. *Applied Physics Letters* **112**, 201104 (2018).
- [16] Qiang Li, Ji-Yang Zhou, **Zheng-Hao Liu**, Jin-Shi Xu, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo, “Stable single photon sources in the near C-band range above 400 K”. *Journal of Semiconductors* **40**, 072902 (2019).
- [17] Jun-Feng Wang, Fei-Fei Yan, Qiang Li, **Zheng-Hao Liu**, Jin-Ming Cui, Zhao-Di Liu, Adam Gali, Jin-Shi Xu, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo, “Robust coherent control of solid-state spin qubits using anti-Stokes excitation”. *Nature Communications* **12**, 3223 (2021).
- [18] Ze-Yan Hao, Kai Sun, Yan Wang, **Zheng-Hao Liu**, Mu Yang, Jin-Shi Xu, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo, “Demonstrating shareability of multipar-

- title Einstein–Podolsky–Rosen steering”. *Physical Review Letters* **128**, 120402 (2022).
- [19] Jun-Feng Wang, Fei-Fei Yan, Qiang Li, Zheng-Hao Liu, He Liu, Guo-Ping Guo, Li-Ping Guo, Xiong Zhou, Jin-Ming Cui, Jian Wang, Zong-Quan Zhou, Xiao-Ye Xu, Jin-Shi Xu, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo, “Coherent control of nitrogen-vacancy center spins in silicon carbide at room temperature”. *Physical Review Letters* **124**, 223601 (2020).
- [20] Mu Yang, Ya Xiao, Yu-Wei Liao, Zheng-Hao Liu, Xiao-Ye Xu, Jin-Shi Xu, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo, “Zonal reconstruction of photonic wavefunction via momentum weak measurement”. *Laser & Photonics Reviews* **14**, 1900251 (2020).
- [21] Yu-Wei Liao, Qiang Li, Mu Yang, Zheng-Hao Liu, Fei-Fei Yan, Jun-Feng Wang, Ji-Yang Zhou, Wu-Xi Lin, Yi-Dan Tang, Jin-Shi Xu, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo, “Deep-learning-enhanced single-spin readout in silicon carbide at room temperature”. *Physical Review Applied* **17**, 034046 (2022).

已授权专利

- [1] 刘正昊、李强、杨木、许金时、李传锋，连续光轨道角动量谐振腔陀螺仪（实用新型专利，专利号：ZL 2019 2 0046847.1）。
- [2] 杨木、刘正昊、李强、许金时，一种波前传感器（实用新型专利，专利号：ZL 2019 2 0033899.5）。

待发表论文

- [1] Zheng-Hao Liu, Qiang Li, Bi-Heng Liu, Yun-Feng Huang, Jin-Shi Xu, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo, “Twenty years of quantum contextuality in USTC”. Contributed to *Journal of University of Science and Technology of China*.
- [2] Yu Meng, Zheng-Hao Liu, Zhikuan Zhao, Peng Yin, Yi-Tao Wang, Wei Liu, Zhi-Peng Li, Yuan-Ze Yang, Zhao-An Wang, Jin-Shi Xu, Shang Yu, Jian-Shun Tang, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo, “Probing asymmetry in spatial-temporal correlations in quantum causal inference”. *In review*.
- [3] Yan Wang, Ze-Yan Hao, Zheng-Hao Liu, Kai Sun, Jin-Shi Xu, Chuan-Feng Li, Guang-Can Guo, Alessia Castellini, Bruno Bellomo, Giuseppe Compagno, and Rosario Lo Franco, “Experimental remote entanglement distribution in a photonic

- quantum network through multinode indistinguishability”. arXiv: 2107.03999.
- [4] Yan Wang, Matteo Piccolini, Ze-Yan Hao, **Zheng-Hao Liu**, Kai Sun, Jin-Shi Xu, Chuan-Feng Li, Guang-Can Guo, Roberto Morandotti, Giuseppe Compagno, Rosario Lo Franco, “Direct measurement of particle statistical phase”. arXiv: 2202.00575.
- [5] **Zheng-Hao Liu**, Hui-Xian Meng, Adán Cabello, Zhen-Peng Xu, Jie Zhou, Jing-Ling Chen, Jin-Shi Xu, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo, “Extreme Quantum Contextuality in a High-dimensional Indivisible System”. *In preparation*.
- [6] **Zheng-Hao Liu**, Qing-Yi Wu, Ze-Yan Hao, Zhen-Peng Xu, Jie Ma, et al., “Reconfigurable measurement of high-dimensional time-bin qudits for demonstrating a three-clause nonclassicality”. *In preparation*.
- [7] Yu Meng, **Zheng-Hao Liu**, Eric Cavalcanti, Jin-Shi Xu, Jian-Shun Tang, et al., “State-independent experimental violation of classical causal descriptions on measurements of a single quantum system”. *In preparation*.